

Exercices sur les chapitres « Matrices structurées » et « Matrices polynomiales »

À préparer pour le 14/11/2019

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne un corps effectif.

Exercice 1 (Produit d'une matrice de Cauchy par un vecteur). Montrer que le produit Cv d'une matrice de Cauchy $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un vecteur $v \in \mathbb{K}^n$ peut s'effectuer en $O(M(n) \log n)$ opérations dans \mathbb{K} .

Exercice 2 (Inversion de Strassen des matrices polynomiales). Soit $M(X)$ une matrice polynomiale carrée de taille n , à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ et de degré borné par d . On suppose que M est inversible, et on souhaite calculer son inverse par l'algorithme d'inversion de Strassen (vu au Cours 2). Estimer la complexité de ce calcul, exprimée en termes d'opérations arithmétiques dans \mathbb{K} et en fonction des deux paramètres n et d , sous l'hypothèse que toutes les matrices rencontrées au cours de l'algorithme sont inversibles.

Exercice 3 (Multiplication rapide de matrices quasi-Toeplitz). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quasi-Toeplitz de rang de déplacement $\alpha \ll n$, représentée de façon compacte par des générateurs (G, H) de taille $n \times \alpha$, *i.e.*, tels que $\phi_+(A) = G \cdot {}^t H$.

- Soient v_1, \dots, v_α des vecteurs quelconques de \mathbb{K}^n . Montrer que le calcul de tous les produits $A \cdot v_\ell$, $1 \leq \ell \leq \alpha$, se ramène, grâce à la formule ΣLU , au problème suivant :

(P) Étant donnés des polynômes $G_j, H_j, V_j \in \mathbb{K}[X]$ ($j \leq \alpha$) de degrés au plus $n - 1$, calculer

$$A_\ell = \sum_{j=1}^{\alpha} G_j (H_j V_\ell \bmod X^n), \quad 1 \leq \ell \leq \alpha.$$

- Donner un premier algorithme qui résout le problème (P), et estimer sa complexité.
- Montrer que le problème (P) admet la reformulation matricielle suivante :

(MP) Étant données des matrices polynomiales \mathbf{G} et \mathbf{V} dans $\mathcal{M}_{\alpha \times 1}(\mathbb{K}[X])$, et \mathbf{H} dans $\mathcal{M}_{1 \times \alpha}(\mathbb{K}[X])$, toutes de degrés au plus $n - 1$, calculer $(\mathbf{VH} \bmod X^n) \mathbf{G}$.

- Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} et \mathbf{C} des matrices polynomiales de tailles $(n \times p)$, $(p \times n)$ et $(n \times p)$ et de degré au plus d . Montrer que le produit \mathbf{ABC} peut être calculé en $O(\frac{n}{p} \text{MM}(p, d))$ opérations dans \mathbb{K} .
- Proposer un algorithme de type « diviser pour régner » (par rapport à n) résolvant le problème (MP) en complexité $O(\frac{\log(\alpha)}{\alpha} \text{MM}(\alpha, n))$.
- Conclure qu'on peut multiplier, dans la représentation par générateurs de déplacement, deux matrices quasi-Toeplitz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang de déplacement au plus α en $O(\frac{\log(\alpha)}{\alpha} \text{MM}(\alpha, n))$ opérations dans \mathbb{K} .