

Exercices sur les chapitres « Évaluation-interpolation » et « Pgcd, résultant »

À préparer pour le 10/10/2019

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne un corps effectif de caractéristique zéro.

Exercice 1. Soient f et g dans $\mathbb{K}[X, Y]$ de degrés au plus d_X en X et au plus d_Y en Y .

1. Montrer qu'il est possible de calculer les coefficients de $h = fg$ en $O(M(d_X d_Y))$ opérations dans \mathbb{K} .
Indication : Utiliser la substitution $X \leftarrow Y^{2d_Y+1}$ pour se ramener à une multiplication de polynômes à une variable.
2. Améliorer ce résultat en donnant un schéma d'évaluation-interpolation qui permette le calcul des coefficients de h en $O(d_X M(d_Y) + d_Y M(d_X))$ opérations de \mathbb{K} .

Exercice 2. Soient $f, g \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes unitaires.

1. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ dont les racines sont les puissances N -ièmes des racines de f peut être obtenu par un calcul de résultant.
2. Si f est le polynôme minimal d'un nombre algébrique α , montrer qu'on peut déterminer un polynôme annulateur de $g(\alpha)$ à l'aide d'un résultant.
3. Calculer le polynôme minimal sur \mathbb{Q} de $\alpha = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.