Exercices sur le chapitre « Algèbre linéaire dense »

À préparer pour le 26/09/2019

Exercice 1. On rappelle qu'une matrice *triangulaire inférieure* $T = (t_{i,j})$ est telle que $t_{i,j} = 0$ pour $i < j$. Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit $\mathsf{T}(n)$ la complexité du produit de deux matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un réel $2 \leq \alpha \leq 3$ tel que $\mathsf{T}(n) = \Theta(n^\alpha)$ pour tout n. Montrer qu'il est possible de multiplier deux matrices arbitraires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $O(\mathsf{T}(n))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2. Soit P un polynôme de degré au plus n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Soit $\theta > 2$ un réel tel que $O(n^\theta)$ opérations dans $\mathbb{K}$ suffisent pour multiplier deux matrices arbitraires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner un algorithme pour évaluer P sur $\lceil \sqrt{n} \rceil$ éléments de $\mathbb{K}$ en $O(n^{\theta/2})$ opérations.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'on peut calculer la matrice $P(A)$ en $O(n^{\theta+1/2})$ opérations de $\mathbb{K}$.
3. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un autre polynôme de degré au plus n, montrer qu'il est possible de calculer les n premiers coefficients du polynôme $P(Q(X))$ en $O(n^{\frac{\theta+1}{2}})$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Indication : Écrire P sous la forme $P_0(X) + P_1(X)X^d + P_2(X)(X^d)^2 + \cdots$, avec d bien choisi et $P_i(X)$ de degrés au plus $d - 1$.