Exercices sur les chapitres
« Évaluation-interpolation » et « Pgcd, résultant »

À préparer pour le 11/10/2018

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps effectif de caractéristique zéro.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ une puissance de 2. Si $\omega \in \mathbb{K}$ est une racine n-ième primitive de l'unité, montrer que l'algorithme FFT est un cas particulier de l'algorithme d'évaluation multipoint par division répétée.

Exercice 2. Soient f et g dans $\mathbb{K}[X, Y]$ de degrés au plus d_X en X et au plus d_Y en Y.

1. Montrer qu'il est possible de calculer les coefficients de $h = fg$ en $O(\mathsf{M}(d_X d_Y))$ opérations dans $\mathbb{K}$. *Indication* : Utiliser la substitution $X \leftarrow Y^{2d_Y+1}$ pour se ramener à une multiplication de polynômes à une variable.
2. Améliorer ce résultat en donnant un schéma d'évaluation-interpolation qui permette le calcul des coefficients de h en $O(d_X \mathsf{M}(d_Y) + d_Y \mathsf{M}(d_X))$ opérations de $\mathbb{K}$.

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes unitaires.

1. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ dont les racines sont les puissances N-ièmes des racines de f peut être obtenu par un calcul de résultant.
2. Si f est le polynôme minimal d'un nombre algébrique α, montrer qu'on peut déterminer un polynôme annulateur de $g(\alpha)$ à l'aide d'un résultant.
3. Calculer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\alpha = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.