Exercices sur les chapitres « Matrices structurées » et « Matrices polynomiales »

À préparer pour le 15/11/2018

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps effectif.

Exercice 1 (Produit d'une matrice de Cauchy par un vecteur)**.** Montrer que le produit Cv d'une matrice de Cauchy $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un vecteur $v \in \mathbb{K}^n$ peut s'effectuer en $O(\mathsf{M}(n)\log n)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2 (Inversion de Strassen des matrices polynomiales)**.** Soit $M(X)$ une matrice polynomiale carrée de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ et de degré borné par d. On suppose que M est inversible, et on souhaite calculer son inverse par l'algorithme d'inversion de Strassen (vu au Cours 3). Estimer la complexité de ce calcul, exprimée en termes d'opérations arithmétiques dans $\mathbb{K}$ et en fonction des deux paramètres n et d, sous l'hypothèse que toutes les matrices rencontrées au cours de l'algorithme sont inversibles.

Exercice 3 (Multiplication rapide de matrices quasi-Toeplitz)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quasi-Toeplitz de rang de déplacement $\alpha \ll n$, représentée de façon compacte par des générateurs (G, H) de taille $n \times \alpha$, *i.e.*, tels que $\phi_+(A) = G \cdot {}^tH$.

1. Soient $v_1, \dots, v_\alpha$ des vecteurs quelconques de $\mathbb{K}^n$. Montrer que le calcul de tous les produits $A \cdot v_\ell$, $1 \le \ell \le \alpha$, se ramène, grâce à la formule ΣLU, au problème suivant :

   (P) Étant donnés des polynômes $G_j, H_j, V_j \in \mathbb{K}[X]$ $(j \le \alpha)$ de degrés au plus $n-1$, calculer
   $$A_\ell = \sum_{j=1}^{\alpha} G_j\,(H_j V_\ell \bmod X^n), \qquad 1 \le \ell \le \alpha.$$

2. Donner un premier algorithme qui résout le problème **(P)**, et estimer sa complexité.
3. Montrer que le problème **(P)** admet la reformulation matricielle suivante :

   (MP) Étant données des matrices polynomiales $\mathbf{G}$ et $\mathbf{V}$ dans $\mathcal{M}_{\alpha\times 1}(\mathbb{K}[X])$, et $\mathbf{H}$ dans $\mathcal{M}_{1\times\alpha}(\mathbb{K}[X])$, toutes de degrés au plus $n-1$, calculer $(\mathbf{VH} \bmod X^n)\,\mathbf{G}$.

4. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ des matrices polynomiales de tailles $(n \times p)$, $(p \times n)$ et $(n \times p)$ et de degré au plus d. Montrer que le produit $\mathbf{ABC}$ peut être calculé en $O(\frac{n}{p}\,\mathsf{MM}(p, d))$ opérations dans $\mathbb{K}$.
5. Proposer un algorithme de type « diviser pour régner » (par rapport à n) résolvant le problème **(MP)** en complexité $O(\frac{\log(\alpha)}{\alpha}\,\mathsf{MM}(\alpha, n))$.
6. Conclure qu'on peut multiplier, dans la représentation par générateurs de déplacement, deux matrices quasi-Toeplitz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang de déplacement au plus α en $O(\frac{\log(\alpha)}{\alpha}\,\mathsf{MM}(\alpha, n))$ opérations dans $\mathbb{K}$.