

Exercices sur les chapitres
« Résolution de récurrences linéaires » et
« Résolution d'équations différentielles linéaires »

À préparer pour le 22/11/2018

Exercice 1. Considérons l'équation différentielle

$$(x-1)(x^2-2)y''(x) + 2x(x^2-x-1)y'(x) + 4(x-2)y(x) = 0.$$

1. Montrer que cette équation n'a aucune solution polynomiale non nulle.
2. Montrer que toute solution rationnelle $y(x) \in \mathbb{Q}(x)$ de cette équation a au plus un pôle d'ordre 1 en $x = 1$, et ne peut avoir de pôle ailleurs.
3. Donner toutes les solutions rationnelles $y(x) \in \mathbb{Q}(x)$ de cette équation.

Exercice 2. Borner le degré des solutions polynomiales de la récurrence

$$3u_{n+2} - nu_{n+1} + (n-1)u_n = 0.$$

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k!$ ne peut pas se simplifier sous la forme $S_n = r(n)/n!$ avec $r(n)$ une fraction rationnelle.

1. Écrire une récurrence à coefficients polynomiaux satisfaite par $r(n)$;
2. Trouver les solutions rationnelles de la récurrence

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 1.$$

3. Conclure.