ALGORITHMES EFFICACES EN CALCUL FORMEL, MPRI C-2-22

PARTIEL DU 29 NOVEMBRE 2018

Durée : 3 heures

Les exercices sont indépendants et de difficulté comparable.
Les réponses jugées trop imprécises ou incomplètes ne seront pas retenues.
L'usage de tout appareil ou ressource électronique est interdit.
La consultation du polycopié et des notes de cours personnelles (papier) est autorisée.

On désigne : $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique zéro,* $\theta \geq 2$ *un exposant réalisable pour le produit des matrices à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, et* M *une fonction de multiplication pour* $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1 (Calcul matriciel).

(1) Si A et B sont deux matrices $n \times r$ et $r \times k$ avec $n \geq r$ et $k \geq r$, à coefficients dans $\mathbb{K}$, expliquer comment calculer AB en $O(nkr^{\theta-2})$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{K}$.

(2) Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré $N \geq n$, expliquer comment calculer $P(A)$ en $O(n^{\theta+1/2} + \mathsf{M}(N))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2 (Produit d'Hadamard d'une série algébrique par une série rationnelle).

Soit $A \in \mathbb{Q}[[X]]$ une série algébrique, et soit $F = \sum_{n \geq 0} f_n X^n$ la série génératrice de la suite définie par la récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ et les conditions initiales $f_0 = 0, f_1 = 1$.

(1) Justifier la D-finitude du produit d'Hadamard $U = A \odot F$.

(2) Montrer que U est algébrique.

(3) Donner un algorithme qui calcule un polynôme annulateur de U à partir d'un polynôme annulateur de A.

(4) Mêmes questions avec $V = A \odot \sum_{n \geq 0} nX^n$.

(5) Montrer que plus généralement, quelle que soit F une série rationnelle de $\mathbb{Q}[[X]]$, le produit d'Hadamard $A \odot F$ est algébrique.

Exercice 3 (Calcul efficace de fonctions symétriques de racines).

Soit N un entier positif, et soient P et Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$, de degrés bornés par N. Le but de cet exercice est de calculer efficacement l'élément

$$s(P, Q) = \sum_{P(\alpha)=0} Q(\alpha),$$

la somme étant prise sur toutes les racines de P dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$, comptées avec leur multiplicités.

(1) Exprimer $s(P, Q)$ à l'aide d'un résultant de polynômes en deux variables. En déduire que $s(P, Q)$ est un élément de $\mathbb{K}$.

(2) Proposer un premier algorithme pour le calcul de $s(P, Q)$, s'appuyant sur la formulation de (1). Estimer sa complexité arithmétique.

(3) Montrer qu'il est possible de calculer l'ensemble des éléments

$$s(P, 1),\ s(P, X),\ s(P, X^2),\ \ldots,\ s(P, X^N)$$

en $O(\mathsf{M}(N))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

(4) En déduire que $s(P, Q)$ peut se calculer en $O(\mathsf{M}(N))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exercice 4 (Calcul rapide des polynômes de Fibonacci)**.** Soit $(F_n(X))_{n\geq 0}$ la suite des polynômes de Fibonacci, définie par les conditions initiales $F_0 = 1$, $F_1 = X$ et la récurrence $F_{n+1} = XF_n + F_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Soit $N \geq 1$.

(1) Estimer la complexité arithmétique d'un calcul direct de tous les coefficients de F_N.

(2) Montrer qu'il est possible de calculer tous les coefficients de F_N en utilisant $O\big(\mathsf{M}(N)\big)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.

(3) Montrer qu'il est possible de calculer la somme des coefficients de F_N en seulement $O(\log N)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.

(4) Montrer que pour tout entier positif n, le polynôme F_n vérifie l'équation différentielle
$$(X^2+4)F_n'' + 3XF_n' - n(n+2)F_n = 0.$$

(5) Donner un algorithme qui permet le calcul de tous les coefficients de F_N en $O(N)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 5 (Preuve automatique d'une identité hypergéométrique)**.** On rappelle que la série hypergéométrique de Gauss de paramètres a, b, c est définie par
$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\,\middle|\, X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{X^n}{n!},$$
où la notation $(a)_n$ désigne le symbole de Pochhammer $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

Indiquer les étapes d'un procédé algorithmique permettant de prouver l'identité
$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ & 1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{1-\sqrt{1-64X}}{2}\right)^2 = 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1}^3 X^n.$$

Exercice 6 (Calcul rapide de sommes de Newton pondérées et résolution rapide de systèmes de Vandermonde transposés)**.** Soit V la matrice de Vandermonde $V = (a_i^j)_{0\leq i,j\leq n-1}$, où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $H := {}^tV \cdot V$ est une matrice de Hankel inversible, et que les éléments de sa première ligne et de sa dernière colonne peuvent être déterminés à partir des $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ en $O(\mathsf{M}(n)\,\log(n))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

(b) Donner un algorithme qui, à partir de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et de n éléments $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ de $\mathbb{K}$, calcule les *sommes de Newton pondérées*
$$N_k = b_0 a_0^k + \cdots + b_{n-1} a_{n-1}^k, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-1,$$
en $O(\mathsf{M}(n)\,\log(n))$ opérations dans $\mathbb{K}$.

(c) Donner un algorithme qui, à partir de $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et d'un vecteur $\mathsf{b} \in \mathbb{K}^n$, calcule l'unique solution $\mathsf{x} \in \mathbb{K}^n$ du système linéaire ${}^tV \cdot \mathsf{x} = \mathsf{b}$ en $O(\mathsf{M}(n)\log n)$ opérations dans $\mathbb{K}$.