RAPPORTS DE RECHERCHE

L. R. I.

SUITES AUTOMATIQUES A VALEURS DANS UN ANNEAU COMMUTATIF

DUMAS P

Unité Associée au CNRS UA 410 : AL KHOWARIZMI

12/ 1989

Rapport de Recherche n° 535

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay
LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
Bât. 490
91405 ORSAY (FRANCE)

SUITES AUTOMATIQUES A VALEURS DANS UN ANNEAU COMMUTATIF

DUMAS P

Unité Associée au CNRS UA 410 : AL KHOWARIZMI

12/ 1989

Rapport de Recherche n° 535

I. INTRODUCTION

Une partition binaire de l'entier naturel n est une partition de n dont les sommants sont des puissances de deux; par exemple, 5 a quatre partitions binaires qui sont 1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+2+2, 1+4. Nous notons $b(n)$ le nombre de partitions binaires de l'entier n (donc $b(5) = 4$). C'est aussi le nombre de mots $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_k$ sur $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sigma_1 = n$ et, pour tout $i \in [1,k-1]$, $\sigma_i \geq 2\sigma_{i+1}$.

Voici les premières valeurs de cette suite:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b(n)	1	1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

Il est bien connu que la suite $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante:

$b(2n+1) = b(2n)$ pour $n \geq 0$,

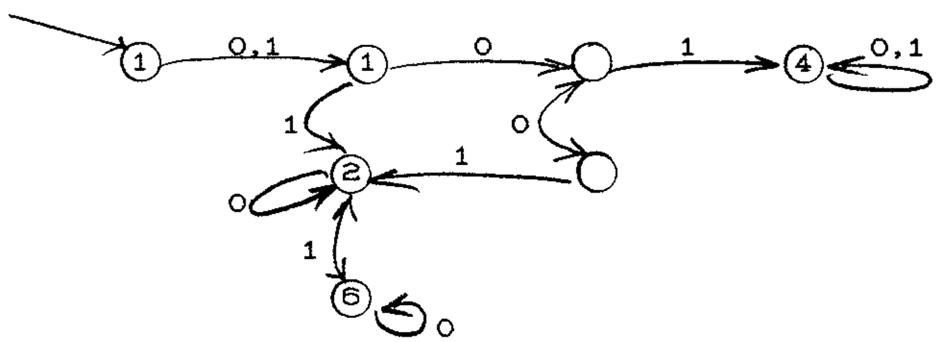
$b(2n) = b(2n-2) + b(n)$ pour $n \geq 1$, et $b(0) = 1$.

Nous nous intéressons à cette suite réduite modulo une puissance de deux, disons 2^N. Par exemple les valeurs de $b(2n)$ modulo 8 pour n = 0 ...256 sont:

1246264246426246264262464246264246426246424626426246264246426246
2642624642462642624626424642624642462642464262462642624642462642
4642624642462642624626424642624642462642464262462642624642462642
6246264246426246264262464246264246426246424626426246264246426246
2642624642462642624626424642624642462642464262462642624642462642
6246264246426246264262464246264246426246424626426246264246426246
4246264246426246264262464246264246426246424626426246264246426246
2642624642462642624626424642624642462642464262462642624642462642
4...

Une légère attention montre que cette suite n'est pas structurée au hasard. Précisément elle est 2-automatique et engendrée par le 2-automate $\mathcal{B}_8$ que voici:

$\mathcal{B}_8 =$



1

Expliquons ce que cela signifie : pour calculer la valeur pour l'entier n de la suite β engendrée par le 2-automate, nous écrivons n en numération binaire (ce qui nous fournit un mot $\tilde{n}$ sur $\{0,1\}$) et, partant de l'état initial , nous suivons les flèches indexées par les bits de n en commençant par les bits de poids faible (l'automate est "à lecture inverse"); nous arrivons ainsi à un état où nous trouvons la valeur $\beta(n)$. Par exemple pour $n = 11$, nous avons le mot $\tilde{n} = 1011$ $(11 = 8+2+1)$ et nous trouvons $\beta(11) = 6$.

Vérifions que cette automate convient: pour $n = 0$, c'est évident; pour $n \neq 0$, $\tilde{n} = w\ 1\ 0^k$, avec $w \in \{0,1\}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, et nous regardons les différentes configurations possibles; nous avons besoin de considérer $d = |w|_1$ (le nombre d'occurrences du chiffre 1 dans le mot w). Dans chaque case, nous donnons successivement les valeurs de $\beta(2n+\varepsilon)$, $\beta(2n-2)$ et $\beta(n)$ $(\varepsilon = 0$ ou $1)$:

	d pair	d impair
k pair	2 6 4	6 2 4
k impair	4 2 2	4 6 6

Nous avons bien dans tous les cas $\beta(2n+\varepsilon) \equiv \beta(2n-2) + \beta(n)$ modulo 8.

Pour montrer que ce résultat est général, il est naturel de s'appuyer d'une part sur l'équation fonctionnelle vérifiée par la série génératrice de la suite $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $B(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b(n)\, z^n = \prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1 - z^{2^k}}$, à savoir $(1 - z)B(z) = B(z^2)$, et d'autre part sur le beau théorème de Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy : *si (u_n) est une suite à valeurs dans un corps fini $\mathbb{F}_q$ $(q = p^m$, p premier$)$, la série formelle $u(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n z^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(z)$ si et seulement si (u_n) est p-automatique.* En effet, pour $f \in \mathbb{F}_q[[z]]$, $f(z^q) = f(z)^q$ et une équation algébrique est la même chose qu'une équation de Malher $\sum_{i=0}^{d} c_i(z) f(z^{q^i}) = b(z)$.

Cependant nous utilisons l'anneau $\mathbb{Z}/2^N\mathbb{Z}$, qui est rarement un corps, et nous sommes donc amené à étudier les suites automatiques à valeurs dans un anneau commutatif. Ce travail est

2

organisé comme suit.

Dans la partie II, nous étudions les q-machines et, après avoir énoncé un bon nombre de banalités, nous montrons comment reconnaître que deux machines définissent le même module de suites automatiques sur un anneau donné.

En III, nous considérons les équations de Malher et nous indiquons comment on peut les résoudre, ou plus précisément comment déterminer la dimension de l'espace des solutions et calculer les solutions à une précision arbitraire.

Dans les paragraphes IV et V, nous étendons le théorème de Christol, Kamae, Rauzy et Mendès-France au cas où les suites considérées sont à valeurs dans un anneau commutatif. Cependant nous n'obtenons pas une équivalence.

Dans la partie VI, nous appliquons deux critères donnés en V pour reconnaitre qu'une suite à valeurs dans un anneau est automatique. En particulier, nous concluons que la suite du nombre de partitions binaires réduite modulo une puissance de 2 est 2-automatique et nous adjoignons quelques exemples similaires.

II. Les q-automates

Dans tout ce qui suit q est un entier supérieur ou égal à deux et nous notons [q] l'intervalle [0,q-1] de $\mathbb{N}$. Au besoin, nous désignerons par $[q]_+$ l'intervalle [1,q-1].

Si n est un entier naturel, nous lui associons le mot sur [q], $\bar{n}$, qu'est son écriture en base q. Précisément si $n = \sum_{i=0}^{N} r_i q^i$, avec $r_i \in [q]$ pour tout i et $r_N \neq 0$, $\bar{n} = r_N \ldots r_1 r_0 \in [q]^*$ ($\bar{n}$ est le mot vide, si n = 0). Dans l'autre sens si $w = r_N \ldots r_1 r_0 \in [q]^*$ nous posons $\underset{\sim}{w} = \sum_{i=0}^{N} r_i q^i$ (r_N peut être nul).

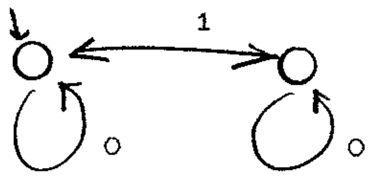
II.1. Les q-machines

II.1.a. Objets

Une q-machine $\mathcal{M} = (\mathcal{S},(t_r),i)$ est la donnée d'un ensemble fini $\mathcal{S}$, appelé ensemble des états, d'une famille d'applications t_r ($r \in [q]$) de $\mathcal{S}$ dans lui-même, les applications de transition, et d'un point initial $i \in \mathcal{S}$.

Nous employons le mot machine car, dans l'étude des suites automatiques, l'automate comprend classiquement une application de sortie à valeurs dans un certain alphabet, ce que nous ne fixons pas pour l'instant. Cependant il s'agit bien d'un automate au sens d'Eilenberg [Eil.p.12], les états terminaux étant ici implicites: ce sont les états qui s'écrivent $t_{r_N} \circ \ldots \circ t_{r_2} \circ t_{r_1}(i)$ avec $r_N \neq 0$ comme nous allons le voir. De plus notre terminologie respecte bien celle d'Eilenberg [Eil.p.266].

Nous représenterons une q-machine de la façon suivante: les états seront des ○, l'état initial i étant indiqué par une flèche ↓; l'application de transition t_r sera matérialisée par des flèches indexées par r. Par exemple la 2-machine $\mathcal{TM}$ usuellement associé à la suite de Thue-Morse sera figuré comme ci-contre.

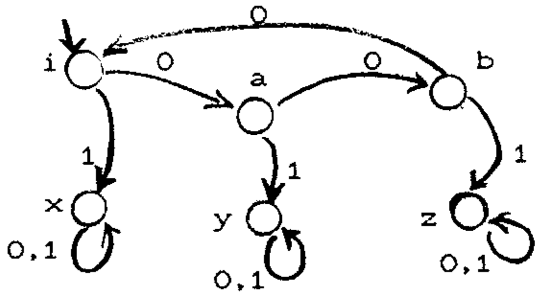


Pour alléger les notations l'application t_r sera simplement notée r, ce qui ne créera pas de confusion. Ainsi les composées d'applications t_r apparaissent comme des mots sur [q] et l'image par $w = r_N \dots r_2 r_1 \in [q]^*$ d'un état s, $t_{r_N} \circ \dots \circ t_{r_2} \circ t_{r_1}(s)$, est notée w.s. Toujours pour abréger, nous parlerons de la machine $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, i)$.

Les états accessibles de $\mathcal{M}$ sont les éléments de $[q]^*.i$ (l'orbite du point initial sous l'action du monoïde $[q]^*$) et l'ensemble des états terminaux de $\mathcal{M}$, que nous noterons généralement $\mathcal{T}$, est constituée des $\bar{n}.i$ avec n entier (ou encore de i et des $(r\ [q]^*).i$ avec $r = 1, \dots, q-1$).

Dans la machine

$\mathcal{M}_{mod3}$ =



tous les états sont accessibles (ce sera en fait le cas dans tous les exemples que nous rencontrerons) et les états terminaux sont i, x, y et z.

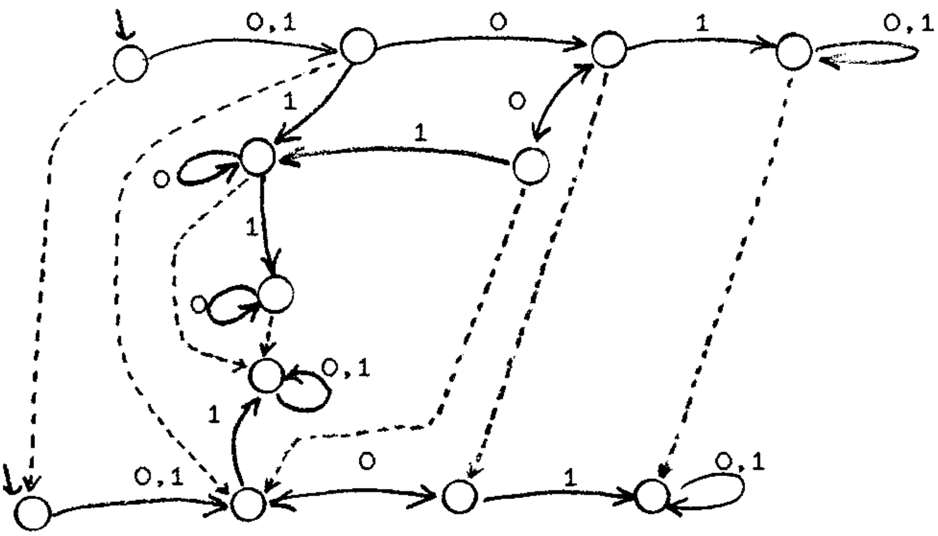
II.1.b. Morphismes

Soient $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, i)$ et $\mathcal{M}' = (\mathcal{S}', i')$ deux q-machines; un morphisme strict de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ est une application $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ qui vérifie $\mu(i) = i'$ et qui "commute" avec les applications de transition: pour tout r de [q] et tout s de $\mathcal{S}$, $\mu(r.s) = r.\mu(s)$.

Par exemple voici un morphisme strict de la machine $\mathcal{B}_8$ sur la machine $\mathcal{B}_4$, matérialisé par les flèches en pointillé:

5

$\mathcal{B}_8$



$\mathcal{B}_4$

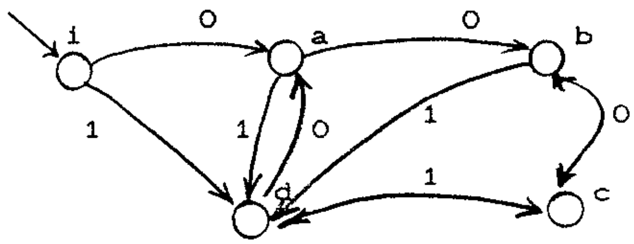
Si $\mu : (\mathcal{S}, i) \longrightarrow (\mathcal{S}', i')$ est un morphisme strict, nous avons pour, $w \in [q]^*$ et $s \in \mathcal{S}$, $\mu(w.s) = w.\mu(s)$. Il en résulte que la partie terminale (resp. accessible) de $(\mathcal{S}, i)$ a pour image la partie terminale (resp. accessible) de $(\mathcal{S}', i')$. En effet un état terminal de $(\mathcal{S}, i)$ s'écrit $\tilde{n}.i$ et a pour image $\mu(\tilde{n}.i) = \tilde{n}.i'$ qui est un état terminal et, inversement, un état terminal de $(\mathcal{S}', i')$ s'écrit $\tilde{n}.i'$ et est l'image de $\tilde{n}.i$. De même pour les états accessibles. [Eilenberg vol. A p. 42]

Dans tout ce qui suit, nous travaillons en fait à isomorphisme strict près, c'est à dire au "renommage" près des états de la q-machine utilisée.

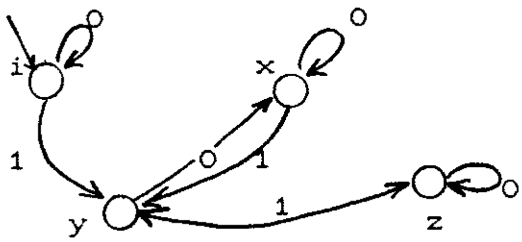
La notion de morphisme strict est trop forte, c'est pourquoi nous définissons un morphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ comme une application $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ telle que, pour tout entier n, $\mu(\tilde{n}.i) = \tilde{n}.i'$. Le raisonnement fait pour les morphismes stricts montre qu'ici aussi l'image de la partie terminale de $\mathcal{M}$ est la partie terminale de $\mathcal{M}'$.

Par exemple, les trois 2-machines suivantes sont isomorphes:

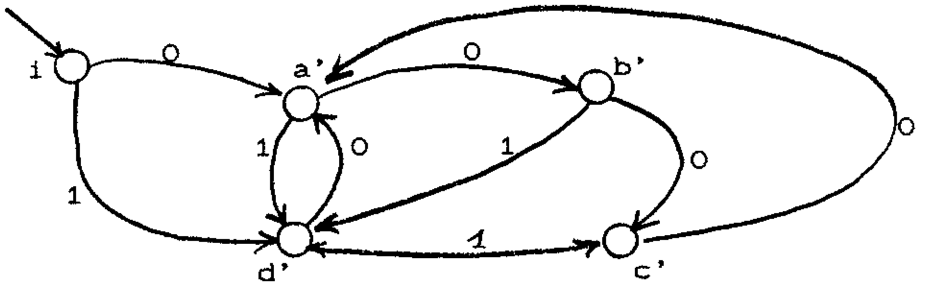
$\mathcal{M}_1 =$



$\mathcal{M}_2$ =



$\mathcal{M}_3$ =



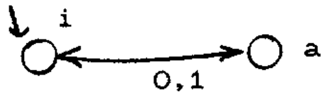
Nous reviendrons au paragraphe II.~~1~~3. sur la notion d'isomorphisme.

II.2. Le module des suites reconnues par une q-machine

II.2.a. Les q-automates

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif (non réduit à {0}), $\mathcal{M}$ une q-machine et $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{A}$ une application dite de sortie . Le couple $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \pi)$ est un q-automate [CKMR][All].

Au q-automate $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, \pi)$ nous associons la suite d'éléments de $\mathbb{A}$ de terme général $\pi(\bar{n}.i)$ et la série formelle $f(\mathcal{M}, \mathbb{A}, \pi, z) = \sum_{n \geq 0} \pi(\bar{n}.i)\, z^n$. Une telle série formelle sera dite reconnue par la q-machine M.

Prenons la machine $\mathcal{L}$ =  , $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, et π définie par $\pi(i) = 1$ et $\pi(a) = -1$, nous obtenons la série $\xi(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{\{\log n\}} z^n$ (où log est le logarithme de base deux avec log 0 = 0), car la machine compte la parité du nombre de bit de l'entier utilisé.

7

II.2.b. Série générique

Si nous considérons en particulier l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ et si π est l'injection naturelle de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$, nous obtenons la série $g_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{n\geq 0} \tilde{n}.i\ z^n$, que nous appelons la série générique de $\mathcal{M}$. Ceci est justifié par le fait que si nous avons une sortie $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{A}$, elle s'étend en un morphisme d'anneaux $\pi : \mathbb{Z}[\mathcal{S}][[z]] \longrightarrow \mathbb{A}[[z]]$ et $f(\mathcal{M}, \mathbb{A}, \pi, z) = \pi(g_{\mathcal{M}}(z))$.

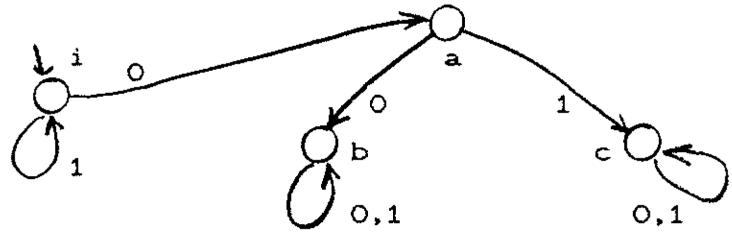
D'ailleurs ceci montre que l'ensemble des séries formelles de $\mathbb{A}[[z]]$ reconnues par $\mathcal{M}$ a une structure de $\mathbb{A}$-module libre isomorphe à $\mathbb{A}^{\mathcal{T}}$, où $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des états terminaux. L'isomorphisme est fourni par l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\mathcal{S}}/_{\mathbb{A}^{\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}}} \simeq \mathbb{A}^{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathbb{A}[[z]] \\ \pi &\longmapsto \pi(g_{\mathcal{M}}(z)) \end{aligned}$$

. Nous désignerons par $\langle \mathcal{M}, \mathbb{A} \rangle$ ce $\mathbb{A}$-module.

A titre d'exemple, prenons la 2-machine du pliage de papier:

$\mathcal{PP}$ =



et l'anneau $\mathbb{Z}$. Avec les trois vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z}^{\langle i,b,c\rangle}$ (nous prenons $i < b < c$), nous obtenons trois sorties, qui fournissent une base de $\langle \mathcal{PP}, \mathbb{Z} \rangle$: $\left(\sum_{n\geq 0} z^{2^n - 1}, \dfrac{z^4}{1 - z^4}, \dfrac{1}{1 - z} \right)$.

Remarque: *Dans tous les cas,* $\zeta(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ *est dans* $\langle \mathcal{M}, \mathbb{A} \rangle$.

II.2.c. Foncteurs

Si nous avons un morphisme de q-machines $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ et si $f = \sum_{n\geq 0} \pi'(\tilde{n}.i')\ z^n \in \mathbb{A}[z]$ est reconnue par $\mathcal{M}'$ grâce à l'application de sortie π', elle est évidemment reconnue par $\mathcal{M}$ en utilisant l'application de sortie $\pi' \circ \mu$: $f = \sum_{n\geq 0} \pi' \circ \mu(\tilde{n}.i)\ z^n$. Ceci définit un morphisme de $\mathbb{A}$-modules $\langle\mu,\mathbb{A}\rangle:\langle\mathcal{M}',\mathbb{A}\rangle \longrightarrow \langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$, qui n'est rien d'autre que $\begin{array}{ccc}\mathbb{A}^{\mathcal{T}'} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \\ \pi' & \longmapsto & \pi'\circ\mu\end{array}$. Si μ est surjectif (ce qui est le cas pour un morphisme strict si les deux machines n'ont que des états accessibles), $\langle\mu,\mathbb{A}\rangle$ est injectif. De plus, il est clair que $\langle\nu\circ\mu,\mathbb{A}\rangle = \langle\mu,\mathbb{A}\rangle\circ\langle\nu,\mathbb{A}\rangle$ pour deux morphismes μ et ν.

Au lieu de changer de machine, nous pouvons changer d'anneau par un morphisme d'anneaux $\phi:\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$; nous avons alors une application semi-linéaire (relative à ϕ), $\langle\mathcal{M},\phi\rangle:\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle \longrightarrow \langle\mathcal{M},\mathbb{A}'\rangle$ avec $\langle\mathcal{M},\psi\rangle\circ\langle\mathcal{M},\phi\rangle = \langle\mathcal{M},\psi\circ\phi\rangle$, si ϕ et ψ sont deux morphismes d'anneaux commutatifs.

En résumé, nous avons construit un bifoncteur $\langle.,.\rangle$ de q-$\mathcal{M}$ $\times$ $\mathcal{A}nn$ dans $\mathcal{L}$, où q-$\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{A}nn$, $\mathcal{L}$) désigne la catégorie des q-machines (resp. des anneaux commutatifs, des modules libres de type fini), et qui est contravariant en sa première variable et covariant en la deuxième.

II.~~4~~3 Isomorphisme de q-machines

Soit $\mathcal{M}$ une q-machine; la série générique $g_{\mathcal{M}}$ peut être vue comme le foncteur qui fait passer d'un anneau $\mathbb{A}$ au module $\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$. Deux questions se posent naturellement: la connaissance de $\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$ pour un anneau donné $\mathbb{A}$ détermine-t-elle $g_{\mathcal{M}}$? Dans quelle mesure est il possible de retrouver $\mathcal{M}$ connaissant $g_{\mathcal{M}}$?

> **Proposition:** *L'anneau $\mathbb{A}$ n'étant pas réduit à zéro, le $\mathbb{A}$-module $\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$ détermine le foncteur $\langle\mathcal{M},.\rangle$.*

dém: En effet, soit $(e_k)_{1\leq k\leq N}$ une base de $\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$. Chaque e_k détermine une partition de $\mathbb{N}$: si $e_k = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, le morceau d'indice $a \in \mathbb{A}$ est constitué des indices n tels que c_n égale a et comme la suite (c_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il n'y

9

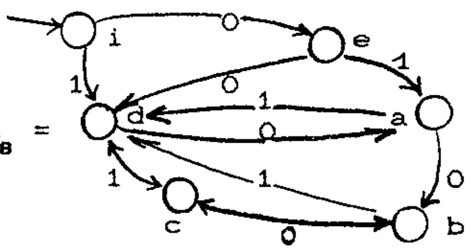
a qu'un nombre fini de blocs. Nous considérons la borne supérieure de ces partitions (ie la partition la moins fine plus fine que ces N partitions; ses blocs sont les intersections non vides de N blocs, un par partition); elle n'a qu'un nombre fini de blocs $\beta_1, \ldots, \beta_M$; à "renommage" près la série générique est $\sum_{n\geq 0} \beta_{i_n} z^n$ où β_{i_n} désigne le bloc auquel appartient l'entier n.■

Venons en à la seconde question.

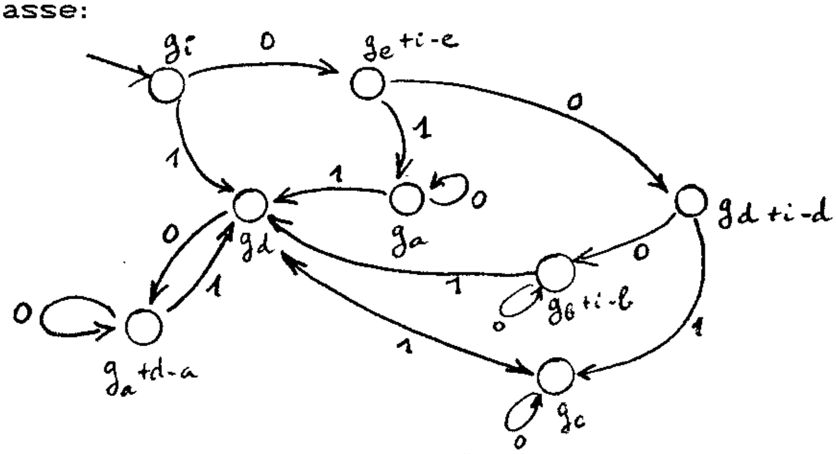
La notion d'isomorphisme définie plus haut n'est rien d'autre que l'égalité des séries génériques associées. La série générique $g_{\mathcal{M}}$ détermine la classe d'isomorphisme de $\mathcal{M}$. Mais comme nous l'avons vu deux machines isomorphes ne sont pas nécessairement strictement isomorphes, donc la donnée de $g_{\mathcal{M}}$ ne détermine pas $\mathcal{M}$.

Nous pourrions cependant espérer que, dans la classe d'isomorphisme de $\mathcal{M}$, il existe une machine plus simple que les autres. Un bon candidat semble être la machine naturellement associée à $g_{\mathcal{M}}$. Elle a pour ensemble d'états l'orbite de $g_{\mathcal{M}}$ sous l'action de $[q]^*$ munie de l'action induite et l'état initial est $g_{\mathcal{M}}$.

Cependant si nous prenons la 2-machine

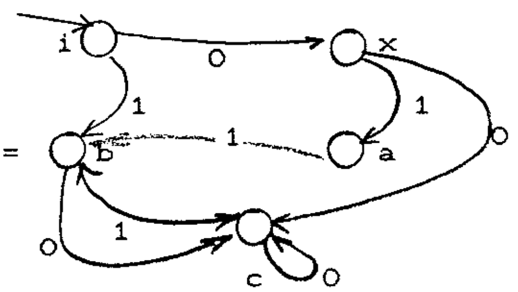
$\mathcal{M}_8 =$ 

l'orbite de $g_{\mathcal{M}_8}$ comporte huit éléments et nous obtenons la 2-machine suivante qui n'est pas minimale en nombre d'états dans sa classe:

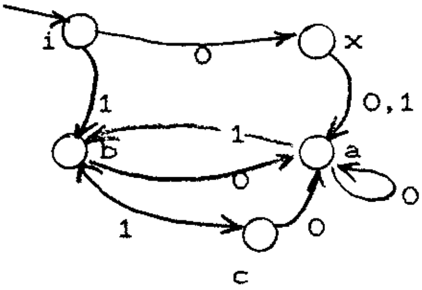


Qui plus est, il peut y avoir plusieurs q-machines minimales (en nombre d'états). Par exemple $\mathcal{M}_{71}$ et $\mathcal{M}_{72}$ sont isomorphes et minimales dans leur classe mais non strictement isomorphes:

$\mathcal{M}_{71}$ =



$\mathcal{M}_{72}$ =



Il n'y a donc pas, a priori, de représentant privilégié dans la classe d'isomorphisme d'une machine. Ou plutôt il y a un représentant privilégié, mais le seul problème est que ce n'est pas une machine!

Etendons en effet la catégorie des q-machines en acceptant que l'ensemble des états soit infini (nous dirons dans un tel cas que nous avons une machine infinie). Il y a alors une q-machine dont toutes les autres sont images par un morphisme strict: le monoïde $[q]^*$ muni de l'action par translation à gauche (nous ne considérons que des machines dont tous les états sont accessibles).

Si $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, i)$ est une q-machine, toutes les machines de sa classe sont images par un morphisme strict de la machine infinie $\hat{\mathcal{M}} = [q]^*/_\sim$, où $\sim$ est la congruence définie par $0^k\,\tilde{n} \sim 0^l\,\tilde{m}$ ssi $\tilde{n}.i = \tilde{m}.i$ et $k = l$ pour n, m, k et l entiers. Nous pouvons dire que $\hat{\mathcal{M}}$ est la borne supérieure de la classe de $\mathcal{M}$ (la machine $\mathcal{M}_1$ est plus grande que la machine $\mathcal{M}_2$ s'il existe un morphisme strict

11

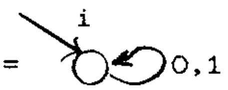
de $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{M}_2$).

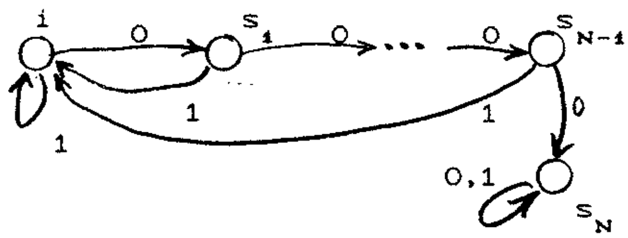
Qui plus est, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux machines isomorphes, il existe une bijection σ entre leurs parties terminales $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, qui apparait comme une restriction de morphisme strict; précisément, pour $r \in [q]_+ = [q]\setminus\{0\}$ et $s \in \mathcal{T}$, $\sigma(r.s) = r.\sigma(s)$. Ceci nous permet d'identifier $\mathcal{T}$ à l'ensemble des terminaux de $\hat{\mathcal{M}}$.

Nous pouvons alors écrire $\hat{\mathcal{S}} = 0^*.\mathcal{T}$ (et tout élément de $\hat{\mathcal{S}}$ s'écrit d'une façon unique $0^k.s$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{T}$). De plus, en posant $\hat{\mu}(0^k.s) = 0^k.s$ (le premier "." concerne $\hat{\mathcal{M}}$ et le second $\mathcal{M}$) nous définissons un morphisme strict de $\hat{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$, que nous qualifierons de canonique.

Cette notion de borne supérieure va nous permettre d'étudier le problème suivant: pouvons nous trouver un entier M tel que la connaissance de la somme partielle $\sum_{n=0}^{M-1} \tilde{n}.i\ z^n$ détermine la série générique $g_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{n\geq 0} \tilde{n}.i\ z^n$?

Remarquons tout de suite que si nous n'imposons pas de limite au nombre d'états de la machine, il n'y a pas d'espoir de solution. Par exemple pour les deux 2-machines

$\perp =$ 

$\gamma_N =$ 

les deux séries génériques $g_\perp$ et g_{γ_N} coïncident modulo z^{2^N}.

> **Proposition:** *Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, i)$, une q-machine ayant au plus N états. La somme partielle $\sum_{n=0}^{3N-1} \tilde{n}.i\ z^n$ détermine $g_{\mathcal{M}}$; plus précisément nous pouvons, connaissant cette somme partielle, construire une q-machine (ayant au plus N^2 états) isomorphe à $\mathcal{M}$.*

dém: Soit $\mathcal{T}$ la partie terminale de $\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{\mathcal{S}}, i)$ la borne supérieure de la classe de $\mathcal{M}$ et $\hat{\mu}$: $\hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ le morphisme strict canonique. Pour $\alpha = (s_r)_{r \in [q]_+} \in \mathcal{T}^{[q]_+}$ ($[q]_+$ désigne toujours $[q] \setminus \{0\}$), nous posons $X(\alpha) = \bigcap_{r \in [q]_+} r^{-1}.s_r$ (précisons que $r^{-1}.s$ désigne l'ensemble des états s'de $\hat{\mathcal{M}}$ tels que $r.s' = s$). Les $X(\alpha)$ forment une partition de $\hat{\mathcal{S}}$.

La connaissance des $\tilde{n}.i$ pour $0 \le n < q^{N-1}$ nous permet de déterminer les états terminaux: en effet dans le graphe qu'est $\mathcal{M}$, il existe pour tout sommet s un chemin de i à s de longueur inférieure ou égale N-1, puisque $\#\mathcal{S} \le N$. En poursuivant jusqu'à $q^N - 1$, nous obtenons les images des états terminaux par les applications $r \in [q]_+$. Ceci nous permet de ranger les états terminaux dans les $X(\alpha)$ (grâce à la restriction de morphisme strict entre $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$, signalée plus haut).

Ensuite pour un état terminal fixé, s, nous considérons les $s_k = 0^k.s$ et plus précisément la séquence $s = \hat{\mu}(s)$, $\hat{\mu}(s_1)$, ..., $\hat{\mu}(s_N)$. Comme $\#\mathcal{S} \le N$, il y a au moins deux éléments égaux dans ces N+1 états et la suite $(\hat{\mu}(s_k))_{k \ge 0}$ (dont l'image est l'orbite $0^*.s$ dans $\mathcal{S}$) est périodique à partir d'un certain rang, r_s, inférieur ou égal à N-1, avec une période, T_s, inférieure ou égale à N (nous avons même $r_s + T_s \le N$).

En fait nous ne connaissons pas la suite $(\hat{\mu}(s_k))_{k \ge 0}$. Par contre, nous pouvons déterminer la séquence $(\alpha_k)_{0 \le k \le N}$, où $s_k \in X(\alpha_k)$. Pour cela nous considérons les $r\, 0^k.s$, $r \in [q]_+$ $0 \le k \le N$, ce qui nécessite, a priori, de connaitre les $\tilde{n}.i$ avec $0 \le n < q^{2N}$, puisque nous savons que $s = w.i$ avec $|w| \le N-1$.

La suite $(\alpha_k)_{k \ge 0}$ vérifie la même propriété de périodicité que la suite $(\mu(s_k))_{k \ge 0}$, car $\hat{\mu}$ est un morphisme strict. (Cependant sa période t_s est en général un sous-multiple de T_s.) Pour déterminer complètement la suite $(\alpha_k)_{k \ge 0}$, il nous suffit de la calculer jusqu'au rang 2N, ce qui suppose, a priori, de connaitre les $\tilde{n}.i$ pour $0 \le n < q^{3N}$.

Ayant déterminé r_s (ou un minorant) et t_s, nous identifions dans $\hat{\mathcal{S}}$ $0^{r_s + k}.s$ et $0^{r_s + l}.s$ si k et l sont congrus modulo t_s. Le passage au quotient nous fournit un morphisme strict de $\hat{\mathcal{M}}$ sur une

13

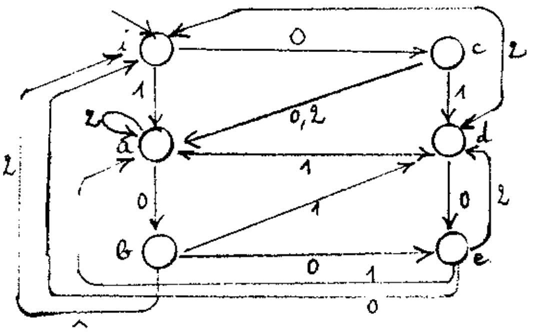
q-machine $\mathcal{M}'$ (car deux éléments identifiés sont dans le même $X(\alpha)$). Cette machine a au plus N^2 états, puisque $\#\mathcal{T} \leq N$ et $r_s + t_s \leq N$.

Pour les deux machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, nous avons une inclusion du module des séries reconnues dans celui correspondant à $\hat{\mathcal{M}}$, parce que nous avons un morphisme strict de $\hat{\mathcal{M}}$ sur l'une comme sur l'autre. Mais les trois machines ont le même ensemble de terminaux et les dimensions des modules sont les mêmes, ce qui fait que les trois machines sont isomorphes.

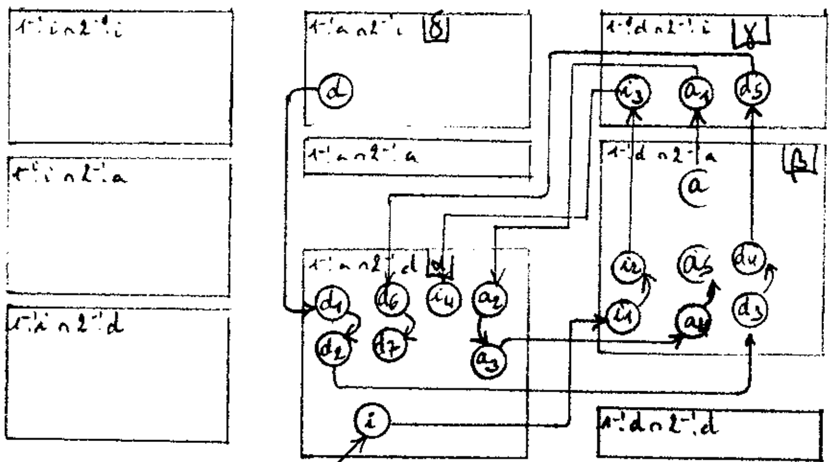
Nous avons donc obtenu une q-machine isomorphe à $\mathcal{M}$. (Mais il n'y a aucune raison qu'elle lui soit strictement isomorphe.)■

Exemple: Pour éclairer notre démonstration, voici un exemple simple. Nous prenons la 3-machine

$\mathcal{Z}$ =

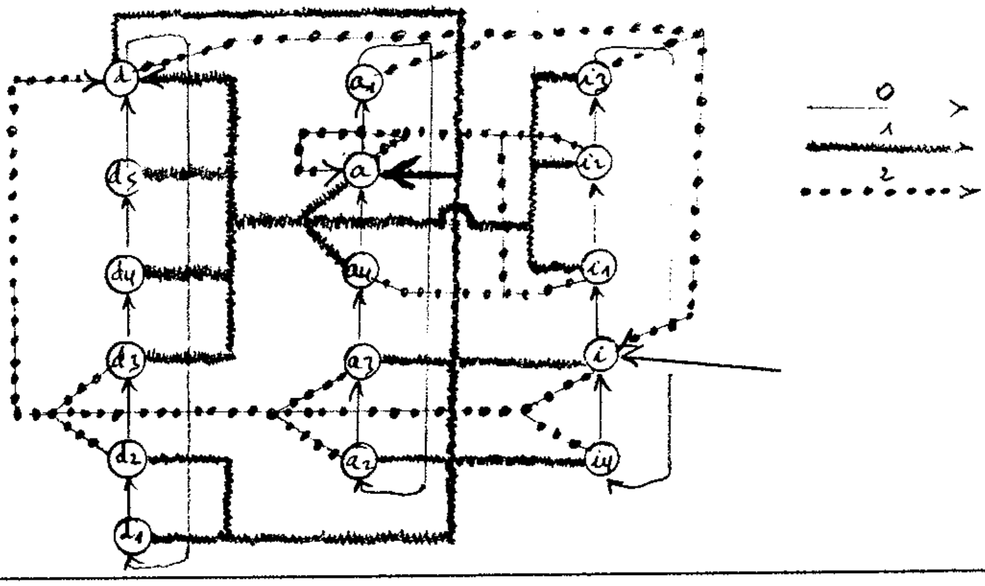


nous en tirons $\hat{\mathcal{Z}}$ (incomplète bien entendu):



Si nous considérons l'état d, la suite (α_k) associée est, avec $X(\alpha) = 1^{-1}.a \cap 2^{-1}.d$, $X(\beta) = 1^{-1}.d \cap 2^{-1}.a$, $X(\gamma) = 1^{-1}.d \cap 2^{-1}.i$ et $X(\delta) = 1^{-1}.a \cap 2^{-1}.i$, $\delta\alpha\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta\beta\gamma\ldots.$ Ceci nous amène à identifier d_6 et d_1. Nous procédons de même pour i et a, et nous obtenons la 3-machine à seize états

$\mathcal{Z}' =$



> **Théorème:** *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux q-machines ayant respectivement N et N' états. Notons M le maximum de N et N'. Alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont isomorphes ssi leurs séries génériques sont égales (à "renommage" près) modulo z^{3M}.*

dém: Ceci est bien clair. Remarquons simplement que nous obtenons le "renommage" en écrivant les séries jusqu'au rang M-1 et en comparant les termes de même indice. Si nous ne trouvons pas une bijection, il est inutile de continuer: les deux machines ne sont pas isomorphes. D'ailleurs ceci nous fournit une (évidente) condition nécessaire d'isomorphisme.

Remarque: Le résultat obtenu est satisfaisant dans la mesure où il nous fournit une procédure effective pour comparer deux machines. Cependant nous n'avons pas répondu à la question plus générale suivante: si une suite automatique est reconnue par une q-machine à N états, jusqu'à quel rang faut il connaître cette suite pour qu'elle soit entièrement déterminée? Notre résultat ne fournit une solution qu'avec l'hypothèse supplémentaire: l'application de sortie est injective.

Ceci dit la question ne nous paraît pas réellement intéressante, parce qu'étant donnée une suite automatique nous ne savons pas a priori majorer le nombre d'états d'un automate minimal qui la définit.

II.4. Rappel des résultats antérieurs

La notion de suite automatique a été définie par Alan Cobham [Cob 72]. Les suites qu'il utilise sont à valeurs dans un alphabet $\mathfrak{A}$ (il n'y a donc pas de notions algébriques). A nos yeux son travail consiste à montrer l'équivalence entre un mode de génération "mécaniste" et un mode génération "topologique" des suites q-automatiques.

La méthode mécaniste est celle que nous venons d'exposer: notre série générique correspond à sa "state sequence" et la suite définie par l'application de sortie π (qui est représentée par une partition) est ce qu'il nomme "sorting sequence".

La méthode topologique consiste à considérer une application zap d'un alphabet Σ dans l'alphabet $\mathfrak{A}$, une application h de Σ dans Σ^q et une lettre σ tel que $h(\sigma)$ débute par σ. L'application h s'étend en un morphisme de $\mathfrak{A}^*$ (et une application de $\Sigma^{\mathbb{N}}$) et la suite $(h^n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un mot infini w qui apparait comme un point fixe de h. La suite q-automatique est l'image de w par zap.

A dire vrai, nous n'utiliserons pas cette équivalence.

G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy [CKMR 80] ont montré que l'on pouvait aussi définir des suites automatiques par un mode de génération "algébrique": une suite à valeurs dans un corps fini $\mathbb{F}_q$ est q-automatique si et seulement si sa série génératrice est algébrique sur $\mathbb{F}_q(z)$.

Il s'agit là du théorème que nous avons cité dans l'introduction. Notez que c'est le même entier q, qui est le cardinal du corps et la base du système de numération utilisé. Notre but est d'étendre ce résultat au cas d'un anneau. Comme le lecteur le verra dans IV et V , nous adapterons pour ce faire les démonstrations de [CKMR].

En particulier, nous utiliserons l'action du monoïde $[q]^*$ sur le $\mathbb{A}$-module $\mathbb{A}[[z]]$ définie par $r.\sum_{n\geq 0} f_n z^n = \sum_{n\geq 0} f_{qn+r} z^n$ pour $r \in [q]$ et $f \in \mathbb{A}[[z]]$, car (f_n) est q-automatique ssi l'orbite de f sous cette action est finie. En effet (f_n) est q-automatique ssi les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de la forme $\{n/f_n = a\}$, $a \in \mathbb{A}$, sont q-reconnaissables d'où l'équivalence d'après [Eil. vol A p. 107].

III. L'algèbre de Malher

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et q un entier supérieur ou égal à deux; dans le $\mathbb{A}$-module $\mathbb{A}[[z]]$ nous considérons l'opérateur de Malher d'indice q, noté M_q ou M, défini par $Mf(z) = f(z^q)$.

III.1. Définition

Rappelons d'abord que, dans un anneau commutatif A, un élément a est régulier ou simplifiable si, pour x dans A, $ax = 0$ implique $x = 0$. L'ensemble des éléments réguliers est stable par multiplication, ce qui permet de définir l'anneau total des fractions de A comme l'anneau des fractions a/b, où a et b sont éléments de A et b est un élément régulier. Les éléments a de A s'identifie aux fractions a/1.

Si nous prenons l'anneau $\mathbb{A}[[z]]$, les éléments réguliers sont les séries formelles $\sum_{n\geq n_o} a_n z^n$ avec a_{n_o} régulier dans $\mathbb{A}$ et l'anneau total des fractions, que nous allons noter $\mathbb{F}$, est constitué des séries de Laurent $\dfrac{\sum_{n\geq n_o} a_n z^n}{\sum_{m\geq m_o} b_n z^n}$ avec les a_n et b_n dans $\mathbb{A}$, b_{n_o} étant régulier. Dans le cas particulier où $\mathbb{A}$ est un corps, $\mathbb{F}$ est simplement le corps des séries de Laurent $\mathbb{A}((z))$.

Dans $\mathbb{F}$ nous pouvons considérer le sous-anneau $\mathbb{R}$ des fractions $p(z)/q(z)$ où $p(z)$, $q(z) \in \mathbb{A}[z]$, le polynôme $q(z)$ étant régulier dans $\mathbb{A}[[z]]$ (ie son terme de plus bas degré a un coefficient régulier). L'anneau $\mathbb{F}$ a une structure de $\mathbb{R}$-module. Nous appelons $\mathbb{B}$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})$ engendrée par les opérateurs de multiplication x_a $(a \in \mathbb{R})$ et l'opérateur de Malher M. Comme la sous-algèbre engendrée par les x_a est isomorphe à $\mathbb{R}$, nous noterons a au lieu de x_a et nous avons donc $\mathbb{B} = \mathbb{R}\,[M]$ avec, pour $a \in \mathbb{R}$, $M\,a = (Ma)\,M$, ou plus clairement $M \circ x_a = x_{Ma} \circ M$.

Grâce à cette dernière relation, tout élément de $\mathbb{B}$ s'écrit $\sum_{k=o}^{K} c_k M^k$, $c_k \in \mathbb{R}$. De plus cette écriture est unique. En effet si nous avons une relation de dépendance linéaire non triviale

17

$\sum_{k=0}^{K} c_k M^k = 0$, quitte à réduire les c_k au même dénominateur, nous pouvons supposer que, pour tout k, $c_k \in \mathbb{A}[z]$. Soit alors $m = \max_k \deg c_k$, nous prenons $f = z^{m+1}$ et nous écrivons $\sum_{k=0}^{K} c_k M^k f = 0$, ce qui nous donne la nullité des c_k.

Ceci nous permet de parler du degré par rapport à M d'un élément F de $\mathbb{B}$, que nous noterons $\deg_M F$. Il a toutes les propriétés usuelles et $\mathbb{B}$ est une $\mathbb{A}$-algèbre unifère non commutative.

III.2. Arithmétique

> **Proposition:** *Soient A et B deux éléments de $\mathbb{B}$ avec B de coefficient dominant régulier, il existe un unique couple (Q,R) d'éléments de $\mathbb{B}$ vérifiant $A = QB + R$ avec $R = 0$ ou $\deg_M R < \deg_M B$.*

dém: Nous employons l'algorithme de la division euclidienne des polynômes à la non commutativité près.

Plus précisément si $A = a_n M^n + \ldots + a_0$, $B = b_m M^m + \ldots + b_0$ avec a_n et b_m non nuls, b_m régulier et $n > m$, nous posons $Q_1 = (a_n (M^{n-m} b_m)^{-1}) M^{n-m}$, puis $R_1 = A - Q_1 B$, etc... A chaque étape nous divisons par un $M^k b_m$, qui est un élément régulier comme b_m, et donc inversible dans $\mathbb{R}$.

> **Corollaire:** *Soient A et B deux éléments de $\mathbb{A}[z,M]$ avec B de coefficient dominant b régulier dans $\mathbb{A}[[z]]$, il existe un couple (Q,R) d'éléments de $\mathbb{A}[z,M]$ et un polynôme c de $\mathbb{A}[z]$ régulier dans $\mathbb{A}[[z]]$ (par exemple $c = \prod_{k=0}^{p} M^k b$ si $p = \deg_M A - \deg_M B > 0$) tel que $cA = QB + cR$ avec $R = 0$ ou $\deg_M R < \deg_M B$.*

dém: On effectue la division dans $\mathbb{F}$, puis on chasse les dénominateurs en multipliant par un diviseur du polynôme c indiqué.

Supposons que l'anneau utilisé est un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Ceci nous permet de développer l'aritmétique de $\mathbb{B}$ comme on le fait usuellement dans un anneau euclidien. Le seul point délicat est que les résultats sont unilatéraux. Plus précisément $A|B$ est défini par $\exists$ Q, B = QA et nous obtenons les résultats suivants, par les démonstrations classiques.

> **Théorème:** *Les idéaux de* $\mathbb{B}$ *sont de la forme* $\mathbb{B}A$, *où* $A \in \mathbb{B}$.
>
> *Soient* A *et* B *deux éléments non nuls de* $\mathbb{B}$ *et* D *leur pgcd, alors il existe* U *et* V *dans* $\mathbb{B}$ *tels que* $UA + VB = D$.
>
> *L'algorithme d'Euclide fournit le pgcd et une relation de Bezout.*

Cependant ceci reste assez théorique car nous ne savons pas reconnaître les irréductibles de degré supérieur ou égal à 2.

III.3. Equations de Malher linéaires

Nous dirons qu'une série formelle f vérifie une équation de Malher linéaire d'ordre N s'il existe $c_0, c_1, \ldots, c_N, b$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$, c_N étant non nul , tels que $c_0(z) + c_1(z)Mf(z) + \ldots + c_N(z)M^N f(z) = b(z)$.

Nous supposons pour l'instant que l'anneau commutatif $\mathbb{A}$ *est un corps* $\mathbb{K}$.

Avec cette hypothèse, les solutions des équations d'ordre 0 sont les fractions rationnelles.

α. Equations du premier ordre.

Pour disposer d'une notation assez concise, nous posons, pour $a \in \mathbb{K}(z)$, $[a]_0 = 1$ et $[a]_n = [a]_{n-1} M^{n-1}a$ si $n \geq 1$, puis $[a]_\infty = \lim_{n\to\infty} [a]_n = \prod_{k\geq 0} M^k a$; cette dernière notation n'a de sens que si la valuation de a, $\omega(a)$, est nulle et $a(0) = 1$. Nous l'étendons au cas où $a(z) = z^{(q-1)l}b(z)$ avec $b(0) = 1$ par la convention $[a]_\infty = z^{-l}[b]_\infty$. Nous avons alors $[a]_n = \dfrac{[a]_\infty}{M^n[a]_\infty}$ pour $n \geq 0$.

Nous cherchons dans $\mathbb{K}((z))$ les solutions d'une équation de Malher linéaire du premier ordre.

Nous commençons par le cas d'une équation homogène $Mf = af$, $a \in \mathbb{K}(z)$.

Le cas $a = 0$ est immédiat: M est injective.

Nous supposons donc $a \neq 0$ et, comme le problème est de trouver les solutions non nulles, soit f une éventuelle solution non nulle de $Mf = af$.

En considérant les valuations dans $Mf = af$, nous avons $q\omega(f) = \omega(a) + \omega(f)$ (c'est ici que nous utilisons le fait que $\mathbb{K}$ est un corps; si nous n'avions pas l'intégrité, nous ne pourrions écrire qu'une inégalité). Nous voyons ainsi que si $\omega(a)$ n'est pas un multiple de $q-1$, l'équation n'a pas de solution différente de 0 (remarquez que pour $q = 2$, cette condition n'intervient pas). Supposons que $\omega(a) = (q-1)l$ et posons $a(z) = z^{(q-1)l}b(z)$ et $f(z) = z^l g(z)$ avec $\omega(b) = 0$, $\omega(g) = 0$. En reportant dans l'équation, nous trouvons $g(0) = b(0)\, g(0)$ et donc $b(0) = 1$. Si cette condition est remplie, la détermination de g se fait par la résolution d'un système triangulaire infini, dont la diagonale ne comporte que des 1, sauf en première position où nous avons un 0. Autrement dit toutes les solutions sont proportionnelles à l'une d'entre elles. Or il est clair que $g = 1/[b]_\infty$ convient.∎

Nous avons donc obtenu le résulat suivant:

20

Proposition: *Soit $a \in \mathbb{K}(z)$, l'équation de Malher $Mf = af$ n'a de solution non nulle dans $\mathbb{K}((z))$ que si $a(z) = z^{(q-1)l}b(z)$ avec $l \in \mathbb{Z}$ et $b(0) = 1$. Elles s'écrivent alors $f = C/[a]_\infty$ avec $C \in \mathbb{K}$.*

Passons aux équations non homogènes $Mf - af + h = 0$ avec $a, h \in \mathbb{K}(z)$ et h non nul. Comme nous avons déjà résolu l'équation homogène associée, le problème est de savoir s'il y a des solutions et, quand il y en a, d'en trouver une.

Pour $a = 0$, l'équation $Mf + h = 0$ n'a de solution que si h est dans l'image de M, ce qui est immédiatement visible.

Si $a \neq 0$, écrivons l'équation sous la forme $af = Mf + h$ et considérons les valuations (f ne peut pas être nulle car h n'est pas nulle): $\omega(a) + \omega(f) \geq \min(q\omega(f), \omega(h))$ avec égalité si $q\omega(f) \neq \omega(h)$. Si $\omega(h) > q\omega(f)$, $(q-1)\omega(f) = \omega(a)$ donc $\omega(a)$ est divisible par q-1 et en reportant dans l'inégalité $(q-1)\omega(h) > q\omega(a)$. Si $\omega(h) < q\omega(f)$, $\omega(f) = \omega(h) - \omega(a)$ et en reportant $(q-1)\omega(h) > q\omega(a)$. Enfin si $q\omega(f) = \omega(h)$, $\omega(h)$ est divisible par q et $\omega(a) + \omega(f) \geq \omega(h)$ d'où $\omega(a) \geq (q-1)\omega(f)$ ou encore $q\omega(a) \geq (q-1)\omega(h)$.

Reprenons maintenant les conditions nécessaires qui viennent d'apparaître.

Si $(q-1)\omega(h) > q\omega(a)$, notons $\delta = (q-1)\omega(h) - q\omega(a)$, $a(z) = z^{\omega(a)}\,b(z)$, $h(z) = z^{\omega(h)}\,k(z)$, $f(z) = z^{\omega(h)-\omega(a)}\,g(z)$. Nous obtenons l'équation normalisée $z^{\delta}\,Mg - b\,g + k = 0$ (avec $\delta > 0$). Elle admet $\sum_{n\geq 0} z^{\frac{q^n-1}{q-1}\delta}\,\frac{M^n k}{[b]_n}$ comme solution. En remplaçant, nous obtenons $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-q^n\omega(a)}\,\frac{h(z^{q^n})}{[a]_n}$.

Si $q\omega(a) \geq (q-1)\omega(h)$, il ne peut y avoir de solution que si $\omega(h)$ est divisible par q. Si cette condition est remplie, posons $\omega(h) = ql$, $\omega(a) = (q-1)l + \delta$, $a(z) = \lambda\, z^{(q-1)l+\delta}\,b(z)$ $(\lambda \neq 0$, $b(0) = 1)$, $h(z) = z^{ql}\,\frac{b(z)}{[b]_\infty}\,k(z)$ et $f(z) = \frac{z^l g(z)}{[b]_\infty}$; cela nous donne l'équation normalisée $Mg - \lambda z^{\delta} g + k = 0$ $(\lambda \neq 0,\ \delta \geq 0)$. Elle n'a de solution que si k est dans l'image de $M - \lambda z^{\delta}$.

Pour étudier cela, remarquons que l'équation équivaut à un système infini d'équations en les coefficients des séries formelles et l'équation correspondant aux termes en z^n est, pour $n \geq \delta$, $\varepsilon_n - \lambda g_{n-\delta} + k_n = 0$ avec $\varepsilon_n = g_{n/q}$ si n est multiple de q et 0 sinon. Pour $n > N = \lceil \delta/(q-1) \rceil$, $n-\delta > n/q$ et nous avons un système échelonné comme disent certains. Ils se résoud sans problèmes si nous connaissons $g_0, \dots, g_N$. Ainsi les conditions qui expriment l'existence de solutions ne portent que sur les coefficients d'indice entre 0 et N.

Considérons l'application induite par $M - \lambda z^{\delta}$ de $\mathbb{K}[z]_N$ dans $\mathbb{K}[z]_{Nq}$. En utilisant la base canonique de $\mathbb{K}[z]$, cette application linéaire a pour matrice

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 1 & . & . & N \\
\hline
0 & 1 & & & & \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
. & & 1 & & & \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
. & & & 1 & & \\
\delta & -\lambda & & & & \\
. & & -\lambda & & & \\
. & & & -\lambda & 1 & \\
. & & & & -\lambda & \\
. & & & & & -\lambda \\
Nq & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\text{ici } q = 3,\ \ \delta = 7, \\
\quad N = \lceil \delta/(q-1) \rceil = 4\ )
\end{array}
$$

Si l'on préfère, en notant M_N et X_δ les matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type $[0,N]\times[0,Nq]$ définies par $M_N(i,j) = 1$ si $i = jq$ et 0 sinon et $X_\delta(i,j) = 1$ si $i = j + \delta$ et 0 sinon, cette matrice est $M_N - \lambda X_\delta$. Or donc il suffit de regarder si le vecteur de $\mathbb{K}^{[0,Nq]}$ $\underline{k} = (k_0, \dots, k_{Nq})$ est dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de cette matrice pour savoir si l'équation proposée possède des solutions. D'ailleurs nous pouvons donner la dimension de ce sous-espace: la matrice $M_N - \lambda X_\delta$ a N+1 colonnes et les N premières sont linéairement indépendantes, donc $N \leq rg(M_N - \lambda X_\delta) \leq N+1$, la différence se faisant sur la dernière colonne. Le rang est N quand la dernière colonne est nulle c'est à dire ssi δ est multiple de q-1 et $\lambda = 1$.

Or donc nous résolvons l'équation $(M_N - \lambda X_\delta)\underline{g} = \underline{k}$ par les méthodes usuelles d'algèbre linéaire, puis, s'il y a des

22

solutions, nous écrivons $k = \underline{k} + z^{Nq+1}\,\overline{k}$ ($\underline{k} \in \mathbb{K}[z]_{Nq}$ et $\overline{k} \in \mathbb{K}[[z]]$). Par le principe des superposition, nous devons résoudre l'équation $M\overline{g} - \lambda\, z^{\delta}\, \overline{g} + z^{Nq+1}\, \overline{k} = 0$, ce qui nous ramène au premier cas étudié car $(q-1)(Nq+1) - q\delta \geq q\delta + q - 1 - q\delta > 0$, puisque $N = \lceil \delta/(q-1) \rceil$.

Récapitulons les résultats obtenus.

Théorème: *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $f(z^q) - a(z)\, f(z) + h(z) = 0$ une équation de Malher d'inconnue $f \in \mathbb{K}((z))$ avec $a, h \in \mathbb{K}(z)$ et $h \neq 0$.*

Si $(q-1)\omega(h) > q\omega(a)$, l'équation admet la solution

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-q^n \omega(a)}\, \frac{h(z^{q^n})}{[a]_n}.$$

Si $(q-1)\omega(h) \leq q\omega(a)$, l'équation a des solutions ssi $\omega(h)$ est divisible par q et le système associé (voir plus haut) de $Nq+1$ équations en $N+1$ inconnues, avec $N = \left\lceil \frac{\omega(a)}{q-1} - \frac{\omega(h)}{q} \right\rceil$, a des solutions.

Exemple: Considérons l'équation $f(z^3) - z^2 f(z) + h(z) = 0$. Ici $q = 3$, nous sommes dans le second cas étudié et l'équation est déjà sous forme réduite; $\delta = 2$ et $N = \lceil 2/(3-1) \rceil = 1$. Nous devons d'abord étudier le système de rang 1:

$$\begin{cases} f_0 + h_0 = 0 \\ \quad\;\; h_1 = 0 \\ -f_0 + h_2 = 0 \\ \quad\;\; h_3 = 0 \end{cases}$$

. Il ne possède de solution que si h est de la forme $h(z) = \alpha(1 - z^2) + z^4\, \overline{h}(z)$. Si tel est le cas, il y a une solution $f(z) = -\alpha + \overline{f}(z)$ et $\overline{f}$ est solution de $\overline{f}(z^3) - z^2\overline{f}(z) + z^4\, \overline{h}(z) = 0$. Nous appliquons le changement de fonction inconnue $\overline{f}(z) = z^2 g(z)$ et nous obtenons l'équation $z^2 g(z^3) - g(z) + \overline{h}(z) = 0$, qui se résoud en $g(z) = \sum_{n\geq 0} z^{3^n - 1}\, M^n \overline{h}$.
Nous avons donc obtenu la solution particulière

$f(z) = -\alpha + \sum_{n\geq 0} z^{3^n+1} M^n\bar{h}$. D'autre part l'équation homogène associée $f(z^3) - z^2 f(z) = 0$ a pour solutions les Cz, $C \in \mathbb{K}$. Finalement les solutions de l'équation $f(z^3) - z^2 f(z) + h(z) = 0$ sont les $f(z) = -\alpha + Cz + \sum_{n\geq 0} z^{3^n+1} M^n\bar{h}$, $C \in \mathbb{K}$, si $h(z) = \alpha(1 - z^2) + z^4\,\bar{h}(z)$ et sinon il n'y en a pas.

Exemple: Nous avons rencontré les équations $z^\delta\, Mg - b\, g + k = 0$ et $Mg - \lambda\, z^\delta\, g + k = 0$. Dans un souci de symétrie, considérons l'équation $Mg - b\, g + z^\delta\, k = 0$ avec b et k de valuation nulle et $\delta > 0$. Nous sommes dans le cas "$(q-1)\omega(h) > q\omega(a)$" et nous posons $\varepsilon = (q-1)\delta$, $g(z) = z^\delta\, \underline{g}(z)$, ce qui nous fournit l'équation $z^\varepsilon\, M\underline{g} - b\, \underline{g} + k = 0$ et $\underline{g} = \sum_{n\geq 0} z^{(q^n-1)\,\delta} \dfrac{M^n k}{[b]_n}$ si $b(0) \neq 1$ ou $\underline{g} = \dfrac{C}{z^\delta [b]_\infty} + \sum_{n\geq 0} z^{(q^n-1)\,\delta} \dfrac{M^n k}{[b]_n}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si $b(0) = 1$.

β. Equations d'ordre supérieur

Commençons par deux remarques pour ce qui concerne les équations de Malher d'ordre $N > 1$.

D'abord nous savons déjà résoudre les équations du type $M^N f - af = h$, tout simplement parce que $M_q{}^N = M_{q^N}$, ce qui nous ramène aux équations d'ordre 1.

Ensuite, en supposant que $[a]_\infty$ a un sens ($a(z) = z^{(q-1)l} b(z)$ et $b(0) = 1$), $P(z,M)$ est divisible par $M - a$ ssi $P(z,M).1/[a]_\infty = 0$. D'ailleurs nous avons dans ce cas l'identité remarquable

$$M^n - [a]_n = [a]_n \left(\frac{1}{[a]_n} M + \frac{1}{[a]_{n-1}} M + \ldots \frac{1}{[a]_1} \right) (M - a).$$

Venons en au cas général.

Nous allons reprendre les idées utilisées dans le cas de l'ordre 1 pour l'étude des équations d'ordre N.

Nous nous plaçons sur un anneau commutatif $\mathbb{A}$, *nous nous donnons des polynômes* $c_0, c_1, \ldots, c_N$ *avec* c_N *non nul et nous voulons étudier, au choix,*

une équation de Malher homogène $\sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = 0$,

une équation de Malher avec second membre $\sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = b(z)$

(b est un polynôme), ou ce que nous allons appeler

une équation malhérienne $\sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = \langle f, \phi \rangle$,

avec ϕ *une application linéaire de* $\mathbb{A}[[z]]$ *dans* $\mathbb{A}[z]$ *dont le noyau contient* $z^{K+1}\mathbb{A}[[z]]$, *pour un certain* K, *autrement dit* $\langle f, \phi \rangle = \sum_{i=0}^{K} f_i b_i$ *avec* $b_i \in \mathbb{A}[z]$ *pour* $i = 0, \ldots, K$ *si* $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$.

Notre but est d'obtenir les solutions de ces équations dans $\mathbb{A}[[z]]$.

Nous associons à chaque $r \in [q]$ un opérateur linéaire de $\mathbb{A}[[z]]$ par $r.g(z) = \sum_{n \geq 0} g_{qn+r} z^n$ si $g = \sum_{n \geq 0} g_n z^n \in \mathbb{A}[[z]]$. Nous étendons ensuite cette notation aux mots de $[q]^*$ par composition: $rw.g = r.(w.g)$, ie nous avons une action linéaire du monoïde $[q]^*$ sur $\mathbb{A}[[z]]$. Notez que si $g = Mh$, $r.(z^l Mh) = (r.z^l)h$ et par linéarité $r.(cMh) = (r.c)h$ pour $c \in \mathbb{A}[z]$.

Revenons à nos équations.

Remarquons d'abord que nous pouvons supposer $c_0 \neq 0$. En effet si k_0 est le premier indice k tel que $c_k \neq 0$, en appliquant les mots $w \in [q]^{k_0}$ aux termes de l'équation, nous obtenons au moins une nouvelle équation, qui est du même type, mais avec $c_0 \neq 0$. Ceci nous fournit une condition nécessaire que doit vérifier une solution de l'équation proposée. Quand nous aurons résolu l'équation auxiliaire que nous venons d'obtenir, il nous suffira de réinjecter les solutions obtenues dans l'équation de départ, pour vérifier qu'elles conviennent.

Nous supposons donc:

c_0 *est non nul, et aussi*

25

le coefficient de plus bas degré de c_0 est inversible.

Nous appelons δ_k la valuation du polynôme c_k (la valuation de 0 est $+\infty$), D_0 le maximum, pour $i = 1,\dots,N$, des $\dfrac{q^i\delta_0 - \delta_i}{q^i - 1}$ et de 0, D_1 le "degré" du second membre (le degré de 0 est $-\infty$, le degré de $\langle f,\phi\rangle = \sum_{i=0}^{K} f_i b_i$ est le maximum de K et des degrés des b_i). Enfin D désigne le maximum de D_0 et D_1.

Théorème: *L'espace des solutions de l'équation proposée:*

$$\text{équation de Malher } \sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = b(z) \text{ ou}$$

$$\text{équation malhérienne } \sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = \langle f,\phi\rangle$$

est déterminé par la résolution des D+1 équations, qui expriment l'égalité des coefficients de z^n dans les deux membres de l'équation pour $n = 0,\dots,D$. S'il n'est pas vide, sa dimension est au plus $D-\delta_0+1$.

preuve: Convenons que $f_t = 0$ si t n'est pas un entier naturel. Si $c_k(z) = \sum_{j=\delta_k}^{d_k} c_{k,j} z^j$, l'équation qui exprime l'égalité des coefficients de z^n dans les deux membres de la proposée est $\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=\delta_k}^{d_k} c_{k,j} f_{\frac{n-j}{q^k}} = 0$ pour $n > D$. Grâce à l'hypothèse $n > D$, nous avons $n - \delta_0 > \dfrac{n-j}{q^k}$ pour $k \geq 0$, $j \geq \delta_k$ et $(k,j) \neq (0,\delta_0)$, ce qui fait que nous avons un système échelonné pour $n > D$ et comme c_{0,δ_0} est inversible, il possède une unique solution si $f_0,\dots, f_{D-\delta_0}$ sont déterminés. De plus $f_0,\dots, f_{D-\delta_0}$ sont obtenus par la résolution d'un système de D+1 équations, d'où l'affirmation sur la dimension.■

Exemple: Prenons l'équation

$$z^2f(z) - (1 + z^3 + z^4)f(z^2) + z^6f(z^4) + (1 + z^4)f(z^8) = 0.$$

Nous avons $q = 2$, $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 6$, $\delta_3 = \cancel{4}\,0$ d'où $D_0 = 4$ et $D_1 = -\infty$, ce qui donne $D = 4$. Ecrivons le système correspondant à l'équation pour que l'aimable lecteur voit bien ce qui se passe:

$$\begin{aligned}
0 &= 0\\
0 &= 0\\
0 &= f_0 - f_1\\
0 &= -f_0 + f_1\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -f_1 + f_3\\
0 &= f_0 - 2f_3 + f_4\\
0 &= -f_2 + f_5\\
0 &= -f_1 - f_4 + f_6\\
0 &= -f_3 + f_7\\
0 &= f_1 - f_3 - f_5 + f_8
\end{aligned}$$

etc...

Nous trouvons donc $f(z) = f_0(1 + z) + f_2z^2 + z^3g(z)$ et g est solution de l'équation

$$g(z) - z(1+z^3+z^4)g(z^2) + z^{13}g(z^4) + z^{19}(1+z^4)g(z^8) = f_0(1-z^3-z^5-z^7) - f_2(z^3+z^{11})$$

Nous retrouvons le résultat indiqué en remarquant qu'il s'agit d'une équation de point fixe associée à une application contractante. De plus le coefficient de g est un polynôme de valuation nulle. Ceci est un phénomène général.

Remarque: Il nous reste un cas non traité: celui où le coefficient de plus bas degré de c_0, c_{0,δ_0}, n'est pas inversible. Supposons que notre anneau $\mathbb{A}$ soit un quotient $\mathbb{P}/(m)$ d'un anneau principal. Notre système d'équations apparaît comme un système de congruences. Nous avons donc un système

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=\delta_k}^{d_k} c_{k,j} \, f_{\frac{n-j}{q^k}} = a_n + m\,u_n,\ n \geq 0,$$

les f_n et les u_n étant les inconnues. Nous pouvons résoudre le système composé des équations d'indices 0 à K en utilisant la théorie des facteurs invariants. De plus, pour K assez grand, le f_n de plus petit indice qui apparaît dans les équations de rang K+1, K+2, etc... est $f_{(K+1-d_N)/q^N}$, ce qui fait qu'en résolvant le système jusqu'au rang K, nous obtenons les solutions dans $\mathbb{A}$ modulo $z^{\lceil (K+1-d_N)/q^N \rceil}$.

Exemple: Nous prenons dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation

$$(2 -2z + z^2)\ f(z) = f(z^2),$$

nous trouvons $f(z) = 0$, $4z+6z^2$, $4z^2$ ou $4z+2z^2$ modulo z^8, en résolvant le système jusqu'au rang 15 et modulo z^{13} en allant jusqu'au rang 25. Cependant nous ne pouvons pas dire que cette équation n'a que ces quatre solutions.

IV. Extension de CKMR (Aller)

Le but de ce paragraphe est de montrer que toute suite automatique à valeurs dans un anneau commutatif vérifie une équation de Malher, c'est à dire une équation du type $c_0(z) + c_1(z)Mf(z) + \ldots + c_N(z)M^Nf(z) = b(z)$,les c_k et b étant des polynômes.

> **Théorème:** *Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif, q un entier ≥ 2, M une q-machine et $f \in \mathbb{A}[[z]]$ une série formelle reconnue par M. Si M a d états accessibles, f vérifie une équation de Malher de degré inférieur ou égal à d:*
> $$\sum_{i=0}^{d} c_i(z).M^if(z) = b(z) \quad \text{avec} \quad , \quad c_0 \ldots c_N \in \mathbb{Z}[z] \quad \text{et}$$
> *$b \in \mathbb{A}[z]$. De plus seul le coefficient b dépend de f, M et $\mathbb{A}$, les autres ne dépendant que de M.*

> **Remarque:** *Plus précisément, b est l'image de f par une application linéaire de $<M,\mathbb{A}>$ dans $\mathbb{A}[z]$, et f est solution d'une équation malhérienne.*

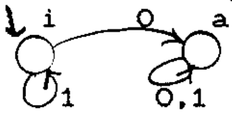
dém: Nous notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des états accessibles de $\mathcal{M}$ et nous convenons de prolonger par 0 une application de sortie pour les états accessibles non terminaux.

Remarquons d'abord qu'il suffit de traiter le cas de la série générique de $\mathcal{M}$, $g_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{n\geq 0} \bar{n}.i\ z^n$; en effet si nous prouvons que $\sum_{k=0}^{d} c_k(z)\ M^kg_{\mathcal{M}}(z) = b(z)$ avec , $c_0 \ldots c_N \in \mathbb{Z}[z]$ et $b \in \mathbb{Z}[\mathcal{V},z]$ et si $f \in \mathbb{A}[[z]]$ est reconnue par $\mathcal{M}$ en utilisant l'application de sortie π, il suffit d'appliquer le morphisme d'anneaux qui prolonge π, $\pi: \mathbb{Z}[\mathcal{V}][[z]] \longrightarrow \mathbb{A}[[z]]$, pour obtenir $\sum_{k=0}^{d} c_k(z)\ M^kf(z) = = \pi(b(z))$.

Quelque soit l'anneau commutatif $\mathbb{A}$, le monoïde $[q]^*$ agit sur $\mathbb{A}[[z]]$ par $r. \sum_{n\geq 0} f_n z^n = \sum_{n\geq 0} f_{qn+r} z^n$ (et nous savons que $f \in \mathbb{A}[[z]]$

29

est q-automatique ssi son orbite $[q]^{*}.f$ sous cette action est finie). Prenons $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ et $f = g_{\mathcal{M}}$. Si nous notons g_s, pour $s \in \mathcal{S}$, la série de $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ reconnue par $(\mathcal{S},s)$ (ie $g_s = \sum_{n\geq 0} \tilde{n}.s\, z^n$), l'orbite de $g_{\mathcal{M}} = g_i$ est directement liée à l'ensemble des g_s, où $s \in \mathcal{V}$, la partie accessible $[q]^{*}.i$ de $\mathcal{A}$. En effet $0.g_s = g_{0.s} + s - 0.s$ et $r.g_s = g_{r.s}$ pour $r = 1,\dots,q-1$.

Pour éclairer la démonstration, nous allons traiter en même temps un exemple simple; nous prenons la 2-machine $\mathcal{X}$ = 

et tout ce qui concerne cet exemple sera mis entre (* et *).

(* Si $\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n-1}$ et $\zeta(z) = \frac{1}{1-z}$, $g_{\mathcal{X}}(z) = g_i(z) = (i-a)\,\alpha(z) + a\,\zeta(z) = i + iz + az^2 + iz^3 + az^4 + \dots$ et $g_a = a\zeta$; $0.g_i = i + az + az^2 + az^3 + az^4 + \dots = i - a + a\,\zeta$. *)

Introduisons maintenant les matrices carrées de type $\mathcal{V}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ associées aux applications $r \in [q]$ (ces applications laissent $\mathcal{V}$ invariant): $T_r = (\delta_{s,r.t})_{(s,t)\in\mathcal{V}^2}$.

(* $\mathcal{V} = \{i,a\}$, $i < a$, $T_0 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; dans la colonne d'indice t nous plaçons un 1 dans la ligne d'indice s si s est l'image de t par r: $s = r.t$; ici $0.i = 0.a = a$ et pour T_0 nous plaçons dans les deux colonnes le 1 dans la ligne d'indice a *)

Remarquons que ces matrices ont pour propriété remarquable d'avoir des coefficients égaux à 0 ou 1, avec exactement un 1 par colonne.

D'ailleurs il en est de même de leurs composés, qui sont aussi des matrices associées à des applications. Précisément nous noterons $T_w = T_{r_N} \dots T_{r_0}$ la matrice associée à $w = r_N \dots r_0 \in [q]^{*}$, ce qui prolonge la notation T_r.

Notons G et V les vecteurs lignes $(g_s)_{s\in\mathcal{V}}$ et $(s)_{s\in\mathcal{V}}$. Les égalités $g_s(z) = \sum_{r\in[q]} z^r\, r.g_s(z^q)$ ie $g_s = \sum_{r\in[q]} z^r\, Mg_{r.s} + s - 0.s$

pour $s \in \mathcal{V}$, se traduisent par l'écriture matricielle $G = MG\ B(z) + VA$, en notant $B(z) = \sum_{r\in[q]} z^r\ T_r$ (c'est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}[z]_{q-1}$), $MG = (Mg_s)_{s\in\mathcal{V}}$ et $A = I_{\mathcal{V}} - T_0$ (avec $I_{\mathcal{V}} = (\delta_{s,t})_{(s,t)\in\mathcal{V}^2}$, la matrice unité de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z})$).

(* $B(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 1 & 1+z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *)

Par récurrence nous tirons de $G = MG\ B(z) + VA$, $G = M^nG\ P_n(z) + VA\ S_{n-1}(z)$, pour tout entier n, en posant $P_0(z) = I_{\mathcal{V}}$, $S_{-1}(z) = 0$, $P_n(z) = P_{n-1}(z^q)\ B(z)$ et $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} P_k(z)$ (P_n a des coefficients de degré $(q^n - 1)/(q-1)$ au plus).

(* $P_0(z) = I_{(i,a)}$, $P_1(z) = B(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 1 & 1+z \end{pmatrix}$, $P_2(z) = B(z^2)\ B(z) = \begin{pmatrix} z^3 & 0 \\ 1+z+z^2 & 1+z+z^2+z^3 \end{pmatrix}$; $P_0(z) = I_{(i,a)}$, $S_1(z) = \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 1 & 2+z \end{pmatrix}$, $S_2(z) = \begin{pmatrix} 1+z+z^3 & 0 \\ 2+z+z^2 & 3+2z+z^2+z^3 \end{pmatrix}$ *)

Prenons n successivement égal à $0,1,\dots,d$ et multiplions à gauche par M^{d-n}, nous obtenons $M^{d-n}G = M^dG\ M^{d-n}P_n + AV\ M^{d-n}S_{n-1}$ pour $0 \le n \le d$. En extrayant ce qui concerne $g_i = g_{\mathcal{M}}$, nous obtenons l'égalité $G_{\mathcal{M}} = M^dG\ Q_+(z) + VA\ R(z)$, où $G_{\mathcal{M}}$ est la matrice ligne $(M^{d-n}g_{\mathcal{M}}(z))_{n\in[0,d]}$, $Q_+(z)$ (resp. $R(z)$) est la matrice de type $(\mathcal{V},[0,d])$ à coefficients des polynômes de $\mathbb{Z}[z]$ de degré au plus $(q^d-1)/(q-1)$ (resp. $(q^{d-1}-1)/(q-1)$) dont la colonne d'indice n est la colonne d'indice i de $M^{d-n}P_n$ (resp. $M^{d-n}S_{n-1}$).

(* $d = 2$, $P_0(z^4) = I_{(i,a)}$, $P_1(z^2) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 1 & 1+z^2 \end{pmatrix}$, $P_2(z) = \begin{pmatrix} z^3 & 0 \\ 1+z+z^2 & 1+z+z^2+z^3 \end{pmatrix}$ d'où $Q_+(z) = \begin{pmatrix} 1 & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 1+z+z^2 \end{pmatrix}$; de même $R(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1+z^2 & 1+z+z^3 \\ 0 & 1 & 2+z+z^2 \end{pmatrix}$; $VA = (i-a\ \ 0)$, $VA\ R(z) = (i-a)\begin{pmatrix} 1 & 1+z^2 & 1+z+z^3 \end{pmatrix}$ *)

Considérons maintenant la matrice $Q_+(z)$ comme étant une matrice à coefficients des fractions rationnelles de $\mathbb{Q}(z)$, ce qui nous permet d'appliquer les résultats bien connus sur les matrices à coefficients dans un corps. Comme $Q_+(z)$ a d lignes et

$d+1$ colonnes, les colonnes sont liées et il existe une matrice colonne non nulle $C(z) = (c_{d-i}(z))_{i\in[0,d]} \in \mathbb{Q}(z)^{[0,d]}$ telle $Q_+(z)\ C(z) = 0$.

$$(*\ C(z) = \begin{pmatrix} z^2(1+z^2) \\ -(1+z+z^2) \\ 1 \end{pmatrix} *)$$

En écrivant $G_{\mathcal{M}}(z)\ C(z) = M^d G\ Q_+(z)\ C(z) + VA\ R(z)\ C(z)$ nous obtenons une relation du type $\sum_{i=0}^{d} c_i(z)\ M^i g_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{s\in\mathcal{V}} b_s(z)(s - 0.s)$, et quitte à multiplier par un polynôme bien choisi nous pouvons supposer que les c_i et les b_s sont dans $\mathbb{Z}[z]$. En prime, avec la notion de déterminant, nous pouvons affirmer que leur degré est majoré par $\left(\frac{q^d - 1}{q - 1}\right)^d$.

$$(*\ g_{\mathcal{X}}(z) - (1+z+z^2)\ g_{\mathcal{X}}(z^2) + z^2(1+z^2)\ g_{\mathcal{X}}(z^4) = (a-i)\ z^2 *)$$

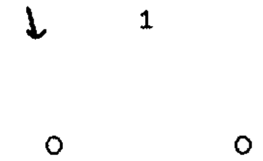
Nous pouvons préciser que le second membre, $b(z)$, de l'équation est la valeur sur la fonction de sortie π d'une application linéaire $\mathbb{A}^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{A}[z]$ ne dépendant que de $\mathcal{M}$, ce qui fait que $g_{\mathcal{M}}$ vérifie une équation malhérienne.

Il faut bien dire que le résultat obtenu est pour l'instant assez illusoire car il se pourrait que dans l'équation $\sum_{i=0}^{d} c_i(z)\ M^i g_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{s\in\mathcal{V}} b_s(z)(s - 0.s)$ tous les coefficients soient nuls (dans l'anneau $\mathbb{A}$ utilisé). Soyons plus précis. Nos coefficients sont des entiers et nous les envoyons par morphisme dans l'anneau $\mathbb{A}$; autrement dit, si l'anneau est de caractéristique $\varkappa$, nous nous retrouvons dans $\mathbb{Z}/\varkappa\mathbb{Z}$. Notre problème est de savoir si tous les coefficients sont nuls modulo $\varkappa$.

Cependant, nous pouvons supposer que les coefficients des polynômes c_i et b sont premiers entre eux dans leur ensemble. Si tous les c_i étaient divisibles par $\varkappa$, l'équation nous fournirait $b = 0$, ce qui contredirait notre hypothèse. Il y donc au moins un c_i non nul modulo $\varkappa$ et nous obtenons donc bien une équation de Malher pour les éléments de $\langle\mathcal{M},\mathbb{A}\rangle$. ∎

IV.1.b Exemples

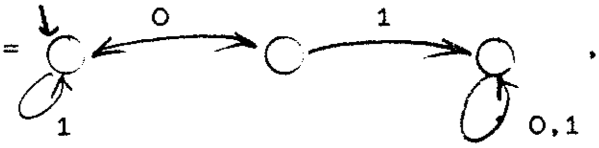
Notre méthode de démonstration n'est pas élégante (comparez avec celle de (KMR!), mais elle a le mérite d'être constructive. Voici donc quelques exemples pour illustrer notre propos.

* Prenons le 2-automate $\mathcal{TM}$ = 

; nous avons

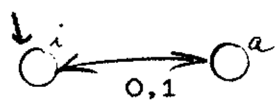
$T_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ d'où $B(z) = \begin{pmatrix}1 & z\\ z & 1\end{pmatrix}$, puis $P_2(z) = B(z)B(z^2) = \begin{pmatrix}1+z^3 & z+z^2\\ z+z^2 & 1+z^3\end{pmatrix}$. Ainsi $P_0(z^4) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $P_1(z^2) = \begin{pmatrix}1 & z^2\\ z^2 & 1\end{pmatrix}$, $P_2(z) = \begin{pmatrix}1+z^3 & z+z^2\\ z+z^2 & 1+z^3\end{pmatrix}$ et ce qui nous fournit $Q_+(z) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1+z^3\\ 0 & z^2 & z+z^2\end{pmatrix}$; nous trouvons $C(z) = \begin{pmatrix}1-z^4\\ -(1+z)\\ z\end{pmatrix}$ et comme $A = I_{\mathcal{Y}} - T_0 = 0$, nous obtenons finalement l'équation $zg_{\mathcal{TM}}(z) - (1+z)g_{\mathcal{TM}}(z^2) + (1-z^4)g_{\mathcal{TM}}(z^4) = 0$.

Pour les autres exemples nous ne détaillerons plus les calculs.

* Avec la 2-machine de Baum-Sweet $\mathcal{BS}$ = 

, nous trouvons

$z^2\, g_{\mathcal{BS}}(z) - (1+z^3+z^4)\, g_{\mathcal{BS}}(z^2) + z^6\, g_{\mathcal{BS}}(z^4) + (1+z^4)\, g_{\mathcal{BS}}(z^8) = 0$.
Le second membre est nul mais T_0 n'est pas égal à $I_{\mathcal{Y}}$.

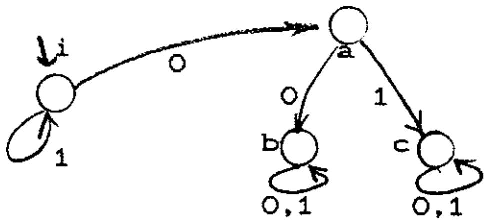
* Avec $\mathcal{L}$ = 

, l'équation est

$g_{\mathcal{L}}(z) - (1+z)(1+z^2)\, g_{\mathcal{L}}(z^4) = (i-a)\, z$. Il n'y a pas de terme en $g_{\mathcal{L}}(z^2) = Mg_{\mathcal{L}}(z)$.

* Avec la machine du pliage de papier ,

33

$\mathcal{P}\mathcal{P} =$ 

,

nous arrivons à l'équation un peu lourde

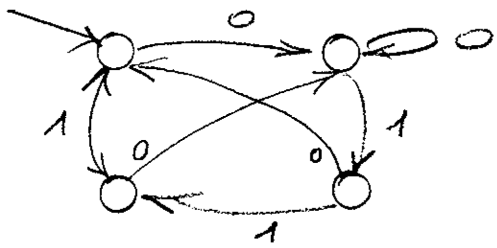
$$\begin{aligned} & z^4(1-z^4)(1+z^8)\ g_{\mathcal{PP}}(z) \\ & -(z^2+z^5+z^6-z^8-z^9+z^{10}-z^{12}+z^{13}+z^{14}-z^{16}-z^{17}-z^{20})\ g_{\mathcal{PP}}(z^2) \\ & +(z^2+z^6+z^{10}-z^{12}+z^{14}-z^{16}-z^{20}-z^{24})\ g_{\mathcal{PP}}(z^4) \\ & -(z^6-z^8-z^{10}+z^{12}-2z^{14}+2z^{16}-2z^{18}+2z^{20}-z^{22}+z^{24}-z^{26}+z^{28})\ g_{\mathcal{PP}}(z^8) \\ & = (b-i)\ (z^8-z^{10}-z^{14}+2z^{16}-z^{18}-z^{22}+z^{24}), \end{aligned}$$

qui a la propriété d'être de degré 3 en M et non 4 (il n'y a pas de terme en $g_{\mathcal{PP}}(z^{16})$) alors que la machine a quatre états accessibles, et pour laquelle tous les coefficients ne sont pas égaux à 1 ou -1.

Sur tous ces exemples, nous voyons que dans l'équation $\sum_{i=0}^{d} c_i(z)\ M^i g_{\mathcal{M}}(z) = b(z)$, le coefficient c_0 est non nul. Nous avons déjà signalé qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas en utilisant les opérateurs $r \in [q]$. De plus il existe au moins un coefficient c_i, $1 \le i \le d-1$, qui est non nul, car pour les machines considérées il y des séries non rationnelles dans le module $\langle \mathcal{M}, \mathbb{Z}[\mathcal{V}] \rangle$. Nous ne pouvons avoir une équation de la forme $c_0 g_{\mathcal{M}} = b(z)$ que si $g_{\mathcal{M}}$ est rationnelle, c'est à dire $g_{\mathcal{M}}$ est la somme d'un polynôme p et d'un multiple de $\zeta = 1/(1-z)$. En effet ou bien il existe un état t tel que pour tout n assez grand $\tilde{n}.i = t$ et $g_{\mathcal{M}} = p + t\zeta$. Ou bien il existe au moins deux états s tels que l'ensemble des n qui vérifient $\tilde{n}.i = s$ est infini. Si $g_{\mathcal{M}}$ vérifiait $c_0 g_{\mathcal{M}} = b(z)$, en prenant l'application de sortie π qui vaut 1 sur l'un de ces états et 0 sur tous les autres, nous otiendrions un $f \in \mathbb{Z}[[z]]$ solution de $c_0 f = b_1$ (avec $b_1 \neq 0$ car $f \neq 0$) et donc f serait rationnelle et l'ensemble des n tels que $f_n = 0$ serait un ensemble q-reconnaissable infini alors que le théorème de Skolem-Malher-Lech dit, qu'à un ensemble fini près, c'est une union finie de progressions arithmétiques.

D'autre part, dans tous les cas le coefficient du monôme de plus bas degré de c_0 vaut 1 ou -1. Ceci n'a rien d'obligatoire comme on le voit en considérant la machine

$\mathcal{M}_{81,296}$



pour laquelle notre procédé fournit une équation dont le premier membre est $z^{20}((2+z^2)g_{\mathcal{M}}(z) - (2z^6+z^7+2z^{14}+z^{15})g_{\mathcal{M}}(z^2) - (2z^2+z^4-z^7+z^8)g_{\mathcal{M}}(z^4) - (z^3+z^4+z^5)g_{\mathcal{M}}(z^8) - (2+2z-z^2)g_{\mathcal{M}}(z^{16}))$.

V. Critère d'automaticité (Retour)

Dans ce paragraphe nous allons généraliser le théorème de Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy dans le sens "solution d'une équation de Malher $\longrightarrow$ suite automatique", ce qui nous amènera à formuler une hypothèse ad hoc.

Pour cela nous allons utiliser l'anneau $\mathbb{A}\langle\langle z\rangle\rangle$ des séries de Laurent formelles $l(z) = \sum_{n\geq n_o} u_n z^n$ ($n_o \in \mathbb{Z}$). (Dans le cas où $\mathbb{A}$ est un corps $\mathbb{A}\langle\langle z\rangle\rangle = \mathbb{A}((z))$.) Comme $\mathbb{A}[[z]]$, $\mathbb{A}\langle\langle z\rangle\rangle$ a une structure de $\mathbb{A}[z]$ module.

Pour une série $l(z) = \sum_{n\geq n_o} u_n z^n$, nous considérons que $u_n = 0$ si $n < n_o$ et nous posons $r.l(z) = \sum_n u_{qn+r} z^n$ pour $r \in [q]$.

Comme l s'écrit $g(z)/z^{n_o}$ avec $g \in \mathbb{A}[[z]]$ ceci nous amène à considérer les opérateurs $B_{r,k}$ sur $\mathbb{A}[[z]]$ définis par $B_{r,k}(g) = r.(z^k g)$ pour $r \in [q]$ et $k \in \mathbb{Z}$ et aussi les $D_{r,k}$ définis par $D_{r,k}(g) = z^k\, r.g$, car nous avons $B_{r,k}(g) = D_{s,l}(g)$ si $k-r = ql-s$ avec $l \in \mathbb{Z}$ et $s \in [q]$.

Remarquez que si $mq \leq k \leq Mq$ alors $m \leq l \leq M$, ce que nous allons tout de suite utiliser.

De plus, dans le cas particulier où $g = Mh \in \mathbb{A}[[z]]$, nous obtenons la formule $r.(z^k Mh) = (r.z^k)h$ et par linéarité $r.(fMh) = (r.f)h$ pour $f \in \mathbb{A}[z]$.

Lemme: *Soit $c \in \mathbb{A}[[z]]$ une série formelle dont le terme de plus bas degré vaut 1: $c(z) = z^m d(z)$ avec $d(0) = 1$. Soit Γ le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{A}\langle\langle z\rangle\rangle$ vérifiant*

$\Gamma \ni 1/c$ et $\Gamma \supset B_{r,s}(\Gamma)$, $\Gamma \supset B_{r,s}(\Gamma/c)$ pour $r,s \in [q]$

ie Γ est l'ensemble des

$$B_{r_i,s_i}\left(\frac{1}{c^{\varepsilon_i}}\cdots\left[\frac{1}{c^{\varepsilon_2}}\,B_{r_1,s_1}\left(\frac{1}{c^{1+\varepsilon_1}}\right)\right]\cdots\right]$$

avec $i \geq 0$, les r_j, s_j dans $[q]$ et les ε_j dans $\{0,1\}$ (pour $i = 0$, nous considérons que ce terme vaut $1/c$). Nous disons que Γ est inclus dans l'ensemble des

$z^{l}\, r_i\cdot\left[\frac{1}{d^{\varepsilon_i}}\cdots\left[\frac{1}{d^{\varepsilon_2}}\, r_1\cdot\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]\right]\cdots\right]$ *avec* $i \geq 0$, *les* r_j *dans* $[q]$, *les* ε_j *dans* $\{0,1\}$ *et* $-m \leq l \leq 0$.

dém: Regardons d'abord le terme $B_{r_1,s_1}\left[\frac{1}{c^{1+\varepsilon_1}}\right]$; il est égal à $B_{r_1,s_1}\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}\, z^{m(1+\varepsilon_1)}}\right]$ ie $B_{r_1,s_1-m(\varepsilon_1+1)}\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]$; mais nous avons les inégalités $-mq \leq -2m \leq s_1-m(\varepsilon_1+1) < q-m \leq q$ et la remarque qui précède le lemme nous donne $B_{r_1,s_1}\left[\frac{1}{c^{1+\varepsilon_1}}\right] = z^{l_1}\, r'_1\cdot\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]$ avec $-m \leq l_1 \leq 1$. En continuant de la même façon le terme $B_{r_2,s_2}\left[\frac{1}{c^{\varepsilon_2}}\, B_{r_1,s_1}\left[\frac{1}{c^{1+\varepsilon_1}}\right]\right]$ s'écrit $B_{r_2,s_2}\left[\frac{z^{l_1-m\varepsilon_2}}{d^{\varepsilon_2}}\, r'_1\cdot\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]\right]$ et $-2m \leq l_1-m\varepsilon_2 \leq 1$ ce qui nous permet d'arriver à l'écriture $z^{l_2}\, r'_2\cdot\left[\frac{1}{d^{\varepsilon_2}}\, r'_1\cdot\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]\right]$ avec $-m \leq l_2 \leq 1$. Par récurrence nous obtenons le résultat désiré.■

Théorème: *Soit* $f \in \mathbb{A}[[z]]$ *une série formelle sur un anneau commmutatif fini, qui vérifie une équation de Malher* $\sum_{k=0}^{N} c_k\, M^k f = b$ *(les* c_k *et* b *sont dans* $\mathbb{A}[z]$*). Nous supposons que*

(H1) le coefficient de plus bas degré de c_0 *est inversible dans* $\mathbb{A}$, *ie* $c_0(z) = \alpha z^m d(z)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{A}^{\bullet}$, $m \geq 0$ *et* $d(0) = 1$,

(H2) l'ensemble Δ *des* $r_i\cdot\left[\frac{1}{d^{\varepsilon_i}}\cdots\left[\frac{1}{d^{\varepsilon_2}}\, r_1\cdot\left[\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right]\right]\cdots\right]$ *avec* $i \geq 1$, r_j *dans* $[q]$ *et* $\varepsilon_j = 0$ *ou* 1 *pour* $j = 1,\ldots,i$ *est fini.*

Alors f *est* q*-automatique.*

dém: Nous reprenons la démonstration donnée dans [CKMR].

Les hypothèses et le lemme nous montrent que le plus petit ensemble Γ de $\mathbb{A}\langle\langle z\rangle\rangle$ vérifiant $\Gamma \ni 1/c_0$ et $\Gamma \supset B_{r,s}(\Gamma)$, $\Gamma \supset B_{r,s}(\Gamma/c_0)$ pour $r,s \in [q]$ est fini. Soit d'autre part $D = \max(\deg b, \max_k \deg c_k)$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des $p\gamma$ avec $p \in \mathbb{A}[z]_D$ et $\gamma \in \Gamma$. $\mathscr{C}$ est fini car $\mathbb{A}$ et Γ sont finis.

Notons $\mathscr{H}$ l'ensemble des $h = a + \sum_{k=0}^{N} a_k M^k f$ avec $a, a_0, \ldots, a_N \in \mathscr{C}$. Puisque $f = (b/c_0) - \sum_{k=1}^{N} (c_k/c_0) M^k f$, f est un élément de $\mathscr{H}$. Nous allons montrer que $r.\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$ pour $r \in [q]$, ce qui établira que f est q-automatique car H est fini.

Soit donc $h \in \mathscr{H}$ et $r \in [q]$. Comme $h = a + \sum_{k=0}^{N} a_k M^k f$, en substituant $f = (b/c_0) - \sum_{k=1}^{N} (c_k/c_0) M^k f$ dans le terme d'indice 0, nous avons $r.h = r.a + r.(a_0 b/c_0) - \sum_{k=1}^{N} r.(a_0 c_k/c_0) M^{k-1} f + \sum_{k=1}^{N} r.a_k M^{k-1} f$ (Nous avons utilisé le fait que $r.(p\, Mg) = r.p\, g$ pour $p \in \mathbb{A}[z]$ et $g \in \mathbb{A}[[z]]$.)

Ensuite a ou a_k s'écrit $p\gamma$ avec $p \in \mathbb{A}[z]_D$ et $\gamma \in \Gamma$. Le polynôme p se décompose en $\sum_{s\in[q]} z^s Mp_s$ d'où $r.(p\gamma) = \sum_{s\in[q]} B_{r,s}(\gamma)\, p_s \in \mathscr{C}$ car $\deg p_s \le D/q \le D$.

De la même façon, $a_0 b/c_0$ ou $a_0 c_k/c_0$ s'écrit $p\gamma/c_0$ avec $p \in \mathbb{A}[z]_{2D}$ et p se décompose en $\sum_{s\in[q]} z^s Mp_s$ d'où $r.(p\gamma/c_0) = \sum_{s\in[q]} B_{r,s}(\gamma/c_0)\, p_s \in \mathscr{C}$ car $\deg p_s \le 2D/q \le D$, puisque $q \ge 2$.

Finalement pour $h \in \mathscr{H}$, $r.h \in \mathscr{H}$. ∎

Théorème (Critère 1): *Soit $f \in \mathbb{Z}[[z]]$ une série formelle sur $\mathbb{Z}$, qui vérifie une équation de Malher $\sum_{k=0}^{N} c_k(z)\, f(z^{p^k}) = b(z)$ (les c_k et b sont dans $\mathbb{Z}[z]$) et p un nombre premier. Nous supposons que le coefficient c_0 s'écrit $c_0(z) = \alpha z^m(1-a(z))$ avec α non divisible par*

38

p, $m \geq 0$ et $a(0) = 0$. Alors, pour tout entier naturel N, la série formelle f réduite modulo p^N est p-automatique.

dém: Nous appliquons le critère donné au théorème précédent.

Si un entier s a pour écriture binaire $\sum_{l \in S} 2^l$, nous disons que S est le support de s et nous écrivons $S = \mathrm{supp}\ s$.

Notons $\pi_s = \prod_{l \in \mathrm{supp}\ s} [1-a(z^{p^l})]$. Nous devons étudions l'ensemble des $w.\frac{1}{(1-a(z))\ \pi_s(z)}$ avec $w \in [p]^*$ et $0 \leq s < 2^{|w|}$.

Remarquez que si $a = 0$, cet ensemble est fini car $\frac{1}{1-a(z)}$ est une constante, ce qui règle la question. Nous supposons donc désormais $a \neq 0$.

Comme l'anneau des entiers modulo p^N est fini, le lemme qui suit nous fournit le résultat cherché.∎

Pour abréger, nous dirons qu'une série formelle est périodique si la suite de ses coefficients est périodique.

Lemme: *Modulo p^N, toutes les séries formelles, $w.\frac{1}{(1-a(z))\ \pi_s(z)}$ avec $w \in [p]^*$ et $0 \leq s < 2^{|w|}$, sont périodiques et admettent la période $p^{N+1}T$, si T est la période de $\frac{1}{1-a(z)}$ modulo p.*

dém: Cela revient à montrer que les $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s}$ avec $0 \leq s < 2^K$ admettent la période $p^{N+K+1}T$. De plus, si t est une période de $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s}$ modulo p^N, alors pt est une période de $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s}$ modulo p^{N+1} (*); nous sommes donc ramenés à prouver que les $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s}$ avec $0 \leq s < 2^K$ admettent la période $p^{K+1}T$, quand on les considère modulo p.

Pour être complet, voici une démonstration de la propriété (*) [KW lemme 7 page 66]. Si $f \in \mathbb{Z}[z]$ et $f(0) = 1$, dire que $1/f(z)$ est périodique modulo p^N avec t comme période, signifie que $f(z)$ divise $1 - z^t$ modulo p^N, ie $z^t = 1 - f(z)g(z) + p^N h(z)$. En élévant à la puissance p, cela donne $z^{pt} = 1 - f(z)G(z) + p^{N+1}H(z)$, ce qui signifie que $1/f(z)$ est périodique modulo p^{N+1} avec pt comme période.

Nous allons maintenant utiliser le fait que nous travaillons modulo p. Ceci va se manifester par l'égalité $f(z^p) \equiv f(z)^p$ pour $f \in \mathbb{F}_p[[z]]$.

En fait, il nous suffit d'étudier les $\frac{1}{\pi_s}$ avec $s \neq 0$. En effet, si s est pair, $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s} = \frac{1}{\pi_{s+1}}$ (si $s < 2^K$, $s+1 < 2^K$). Et si s est impair, soit l le premier naturel qui n'est pas dans supp s; nous utilisons l'égalité $(1-a(z))^2(1-a(z^p))(1-a(z^{p^2}))\ldots(1-a(z^{p^{l-1}})) = (1-a(z))^2(1-a(z))^p(1-a(z))^{p^2}\ldots(1-a(z))^{p^{l-1}} = (1-a(z))^{p^l} = 1-a(z^{p^l})$ et nous obtenons $\frac{1}{(1-a)\ \pi_s} = \frac{1}{\pi_{s'}}$ (avec $0 < s' < 2^{K+1}$ si $s < 2^K$).

Maintenant nous procédons par récurrence sur le nombre de 0 dans l'écriture binaire de s.

Si $s = 2^K-1$ $(K \geq 1)$, $\frac{1}{\pi_s} = \frac{1}{[1-a(z)][1-a(z^p)]\ldots[1-a(z^{p^{K-1}})]}$

$$= \frac{1}{[1-a(z)][1-a(z)^p]\ldots[1-a(z)^{p^{K-1}}]} = \frac{1}{[1-a(z)]^{p^K-1}} = \frac{1-a(z)}{[1-a(z)]^{p^K}}.$$

$= \frac{1-a(z)}{1-a(z^{p^K})}$. Comme $\frac{1}{1-a(z)}$ admet la période T modulo p, $\frac{1}{1-a(z^{p^K})}$ admet la période $p^K T$ et $\frac{1+a(z)]}{1-a(z^{p^K})}$ aussi car le degré de $1+a(z)$ est strictement plus petit que celui de $1-a(z^{p^K})$.

Si s possède au moins un zéro dans son écriture binaire, soit l le premier entier qui n'est pas dans supp s; nous pouvons écrire $s = 2^{l+1}r + 2^l-1$ avec $r \neq 0$. Ceci nous donne $\frac{1}{\pi_s} =$

40

$$\frac{1}{[1-a(z)][1-a(z^p)]\dots[1-a(z^{p^{l-1}})]}\,\frac{1}{\pi_r(z^{p^{l+1}})} =$$

$$\frac{1}{[1-a(z)]^{p^l-1}}\,\frac{1}{\pi_r(z^{p^{l+1}})} = \frac{[1-a(z)]^{(p-1)(p^l-1)}}{[1-a(z)]^{p(p^l-1)}}\,\frac{1}{\pi_r(z^{p^{l+1}})} =$$

$\dfrac{[1-a(z)]^{(p-1)(p^l-1)}}{\pi_{2^lr+2^l-1}(z^p)}$. Le nombre $t = 2^lr + 2^l - 1$ a un zéro de moins que s dans son écriture binaire. De plus si $s < 2^K$, $t < 2^{K-1}$; d'après l'hypothèse de récurrence $\dfrac{1}{\pi_{2^lr+2^l-1}(z)}$ a pour période $p^{K-1}T$, donc $\dfrac{1}{\pi_{2^lr+2^l-1}(z^p)}$ a pour période p^KT et comme le numérateur a un degré strictement plus petit que celui de $\pi_{2^lr+2^l-1}(z^p)$ (regardez l'avant dernière expression), il en est de même de $\dfrac{1}{\pi_s}$.

Le résultat en découle.■

Passons à une autre application (plus facile) du théorème, ce qui va nous fournir un deuxième critère d'automaticité.

> **Théorème (Critère 2):** *Soit $f \in \mathbb{A}[[z]]$ une série formelle sur un anneau commutatif $\mathbb{A}$, qui vérifie une équation de Malher $\sum_{k=0}^{N} c_k M^k f = b$ (les c_k et b sont dans $\mathbb{A}[z]$ et $Mf(z) = f(z^q)$). Nous supposons le coefficient c_0 s'écrit $c_0(z) = \alpha z^m(1-\mu a(z))$ avec α inversible dans $\mathbb{A}$, $m \geq 0$ et $a(0) = 0$. Nous supposons aussi que que les anneaux quotients $\mathbb{A}/(\mu^N)$, avec N entier ≥ 1, sont finis. Alors, pour tout entier naturel N, la série formelle f réduite modulo μ^N est q-automatique.*

dém: Si a = 0, le résultat est évident. Sinon, soit ν le degré de a.

41

Nous avons $\frac{1}{[1 - \mu\, a(z^{q^l})]} = 1 + \mu\, a(z^{q^l}) + \mu^2\, a^2(z^{q^l}) + \dots + \mu^{N-1}\, a^{N-1}(z^{q^l})$ modulo μ^N. Ainsi, modulo μ^N, $\frac{1}{1 - \mu\, a(z^{q^l})}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(N-1)\nu q^l$ et donc, avec des ε_l égaux à 0 ou 1 (et en notant $s = \sum \varepsilon_l 2^l$), truc(s) = $\frac{1}{[1 - \mu a(z)]^{1+\varepsilon_1}\,[1 - \mu a(z^q)]^{\varepsilon_2}\dots[1 - \mu a(z^{q^{i-1}})]^{\varepsilon_{i-1}}}$ est un polynôme de degré $\le (N-1)\nu(1+\varepsilon_1+q\varepsilon_2\dots+q^{i-1}\varepsilon_i) \le (N-1)\nu q^i$. Il en résulte que, avec w dans $[q]^i$, w.truc(s) est un polynôme de degré $\le (N-1)\nu$ modulo μ^N.

En reprenant les notations du théorème ($d(z) = 1 - \mu a(z)$), l'ensemble des $r_i.\left(\frac{1}{d^{\varepsilon_i}}\dots\left(\frac{1}{d^{\varepsilon_2}}\, r_1.\left(\frac{1}{d^{1+\varepsilon_1}}\right)\right)\dots\right)$ réduit modulo μ^N, avec $i \ge 1$, r_j dans $[q]$ et $\varepsilon_j = 0$ ou 1 pour $j = 1,\dots,i$, est inclus dans $\left(\mathbb{A}/(\mu^N)\right)[z]_{(N-1)\nu}$, le module des polynômes à coefficients dans l'anneau fini $\mathbb{A}/(\mu^N)$ et de degré inférieur ou égal à $(N-1)\nu$. Il est donc fini, ce qui nous permet de conclure.

VI. Applications

VI.1. Les relations de récurrence linéaires q-tomiques

Dans ce qui suit $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif et q un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{A}$, nous disons qu'elle vérifie une relation de récurrence linéaire q-tomique, s'il existe des entiers N et M supérieurs ou égaux à 1, tels que (u_n) soit définie par

la donnée de $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ et

$$\forall\, n \geq N,\ u_n = \sum_{i=1}^{N} a_i u_{n-i} + \sum_{j=1}^{M} b_j u_{\lfloor n/q^j \rfloor}.$$

Notons $u(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$ la série génératrice de (u_n), $a(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i z^i$ et $u_0(z) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n$. Nous pouvons écrire $u(z) = u_0(z) + \sum_{n\geq N} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i u_{n-i} + \sum_{j=1}^{M} b_j u_{\lfloor n/q^j \rfloor} \right) z^n =$ $u_0(z) + a(z)\, u(z) + \sum_{j=1}^{M} b_j\, rab_j(z)$ avec $rab_j(z) =$ $p_j(z) + \sum_{n\geq q^j K_j} u_{\lfloor n/q^j \rfloor} z^n =$

$p_j(z) + [1 + z + \ldots + z^{q^j-1}] \sum_{k\geq K_j} u_k \left(z^{q^j}\right)^k$ en posant $K_j = \lceil N/q^j \rceil$ et $p_j(z) = \sum_{N\leq n< q^j K_j} u_{\lfloor n/q^j \rfloor} z^n$. En transformant encore un peu cette égalité, nous arrivons à $(1 - a(z))\, u(z) = \sum_{j=1}^{M} b_j\, [1 + z + \ldots + z^{q^j-1}]\, u(z^{q^j}) + b(z)$ avec $\deg b < N$.

Inversement si u satisfait cette équation de Malher, (u_n) satisfait une relation de récurrence q-tomique linéaire.

Cette équation de Malher est d'une forme assez particulière; d'ailleurs si nous posons $v(z) = (1 - z)\, u(z)$, nous voyons que v satisfait $(1 - a(z))\, v(z) = \sum_{j=1}^{M} b_j\, v(z^{q^j}) + (1 - z)\, b(z)$, qui est quasimment une équation à coefficients constants.

En appliquant les résultats de la partie V, nous obtenons le

Théorème: *Soit p un nombre premier et* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'entiers, qui satisfait une relation de récurrence linéaire p-tomique,*

$$\forall\, n \geq N,\ u_n = \sum_{i=1}^{N} a_i u_{n-i} + \sum_{j=1}^{M} b_j u_{\lfloor n/p^j \rfloor}$$

avec $N, M \geq 1$. Alors, réduite modulo une puissance de p, cette suite est p-automatique.

En particulier, nous avons le

Corollaire: *Soit p un nombre premier et* $\pi_{n,p}$ *le nombre de partitions de l'entier n dont les sommants sont des puissances de p. La suite* $(\pi_{n,p})_{n\geq 0}$*, réduite modulo une puissance de p, est p-automatique.*

En prenant p = 2, nous pouvons répondre à la question qui a motivé ce travail:

Proposition: *La suite du nombre de partitions binaires,* $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$*, réduite modulo une puissance de 2, est 2-automatique.*

Dans le théorème précédent, nous avons considéré des équations linéaires homogènes; nous pouvons généraliser quelque peu en traitant les équations linéaires non homogènes:

Corollaire: *Soit p un nombre premier et* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'entiers, qui satisfait une relation de récurrence linéaire p-tomique,*

$$\forall\, n \geq N,\ u_n = v_n + \sum_{i=1}^{N} a_i u_{n-i} + \sum_{j=1}^{M} b_j u_{\lfloor n/p^j \rfloor}$$

avec $N, M \geq 1$ et (v_n) de série génératrice rationnelle $v(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$, où $d(0)$ est premier avec p. Alors, réduite modulo une puissance de p, cette suite est p-automatique.

dém: Nous reprenons le calcul du début du §, ce qui nous donne: $(1 - a(z))\, u(z) = v(z) + \sum_{j=1}^{M} b_j\, [1 + z + \ldots + z^{q^j - 1}]\, u(z^{q^j}) + b(z)$ et en supprimant les dénominateurs $(1 - a(z))\, d(z)\, u(z) = n(z) + d(z) \sum_{j=1}^{M} b_j\, [1 + z + \ldots + z^{q^j - 1}]\, u(z^{q^j}) + d(z)\, b(z)$, après quoi nous appliquons le critère 1.

VI.2 Palindromes sans préfixe et mots à bords

Soit X un alphabet de m lettres. Un palindrome est un mot sur X de longueur supérieure ou égale à 2, qui est égal à son miroir (comme esoperesteetserepose). Un palindrome sans préfixe est un palindrome qui n'a pas de préfixe strict, qui est lui même un palindrome (par contre-exemple, abacaacaba n'est pas un palindrome sans préfixe, à cause de son préfixe aba).

Notons $\pi_{n,m}$ le nombre de palindromes sans préfixe de longueur n sur m lettres et $F_m(z) = \sum_{n\geq 2} \pi_{n,m} z^n$. La série F_m vérifie l'équation de Malher $z(1-mz^2)F_m(z) + (1+z)F_m(z^2) = mz^3(1+mz)$. Ceci permet d'aiileurs d'en donner une expression explicite:

$$F_m(z) = m \sum_{l\geq 0} (-1)^l\, z^{2^l+1}\, \frac{1 - z^{2^l}}{1 - z}\, \frac{1 + mz^{2^l}}{(1-mz^2)(1-mz^4)\ldots(1-mz^{2^{l+1}})}.$$

Remarquez que pour m = 2, nous avons une fonction rationnelle: $F_2(z) = \frac{2z^2}{1 - z}$, en effet les palindromes sans préfixes sur 2 lettres sont de la forme ab...ba.

En appliquant le critère 2, nous obtenons la

Proposition: *Pour tout entier N, la suite du nombre de palindrome sans préfixe sur m lettres* $(\pi_{n,m})_{n\geq 0}$ *réduite modulo* m^N *est 2-automatique.*

Un mot à bord sur X est un mot de la forme bwb avec $b \in X^+$ et $w \in X^*$. Notons $bw_{n,m}$ le nombre de mots à bord de longueur n sur un alphabet de m lettres et $B_{1,m}(z) = \sum_{n\geq 2} bw_{n,m} z^n$. La série $B_{1,m}$ vérifie l'équation de Malher

$$(1-mz^2)[(1-mz)B_{1,m}(z) + B_{1,m}(z^2)] = mz^2.$$

En appliquant le critère 2 avec $a(z) = z + z^2 - mz^3$, nous obtenons la

Proposition: *Pour tout entier N, la suite du nombre de mots à bord sur m lettres* $(bw_{n,m})_{n\geq 0}$ *réduite modulo* m^N *est 2-automatique.*

VI.3. Nombre de partitions suivant le nombre de sommants

Soit p un nombre premier. Notons $\pi_{p,n,m}$ (resp. $\pi_{p,n,\leq m}$) le nombre de partitions de l'entier n dont les sommants sont des puissances de p et où chaque sommant apparait exactement (resp. au plus) m fois. La fonction génératrice du nombre de partitions p-aires suivant le nombre de sommants est $P_p(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1 - tz^{p^k}}$ (t marque le nombre de sommants) et elle vérifie l'équation de Mahler $(1 - tz)\, P_p(z) = P_p(z^p)$. Si nous nous plaçons dans l'anneau fini $\mathbb{Z}[t]/(p^N, t^{m+1})$, en appliquant le critère 2, nous voyons que la suite des résidus $\sum_{l=0}^{m} (\pi_{p,n,l} \bmod p^N)\, t^l$, $n = 0,1,\ldots$ est p-automatique. Comme $\pi_{p,n,\leq m} = \sum_{l=0}^{m} \pi_{p,n,l}$, il en résulte la

46

Proposition: *Soit p un nombre premier et $\pi_{p,n,\leq m}$ le nombre de partitions de n dont les sommants sont des puissances de p et où chaque sommant apparait au plus m fois. La suite $(\pi_{p,n,\leq m})_{n\geq 0}$ réduite modulo p^N est p-automatique.*

VII. Conclusion

Ainsi, nous avons répondu à la question qui était posée au début de ce travail et à quelques autres.

Comme le lecteur a pu le remarquer, notre travail pêche sur un point qui apparait plusieurs fois: nous ne savons pas réellement quoi dire des équations de Mahler $\sum_{k=0}^{N} c_k(z)\, f(z^k) = b(z)$ si le coefficient de plus bas degré de c_0 est non inversible. Ceci reste donc dans l'ombre pour l'instant.

Dans le théorème de Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy ainsi que dans le théorème du paragraphe V, il y a un lien extrêment fort entre la caractéristique des anneaux utilisés et la base du système de numération employé: ils sont carrément égaux!

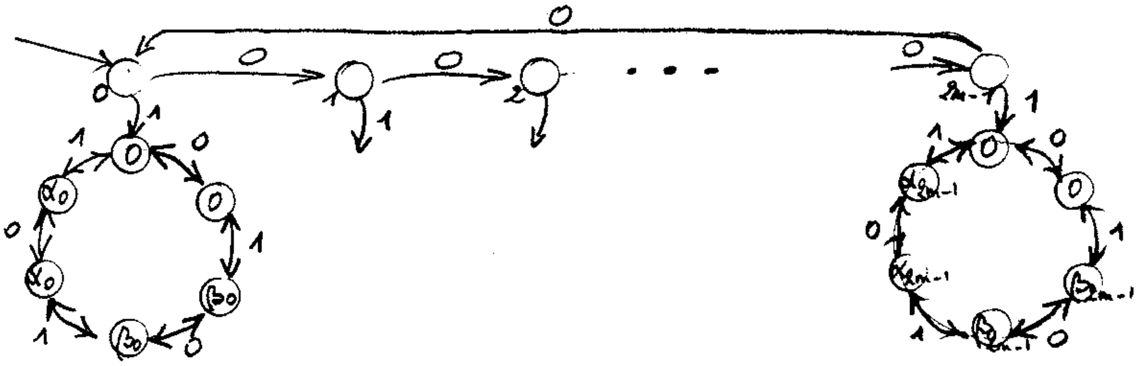
Pourtant nous avons vu qu'une suite d'entiers, qui est q-automatique quand on la réduit modulo m, vérifie une équation de Malher et ce quel que soit l'entier m.

De même, si nous prenons la suite d'entiers dont le terme d'indice n, u_n, est le résidu modulo 2 de $v_2(n)$ (où v_2 désigne la valuation dyadique), elle vérifie $u_0 = u_1 = 1$ (pour 0, c'est une convention) et $\forall\, n \geq 2$, $u_n = -u_{n-1} + u_{\lfloor n/2 \rfloor}$, ce qui amène l'équation de Malher $(1 + z)\, u(z) = z + (1 + z)\, u(z^2)$. De plus elle est clairement 2-automatique modulo n'importe quel entier m.

Donnons un autre exemple un peu moins simple. Prenons la suite d'entiers (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_{2n} = \varepsilon_{2n} + u_n$, $u_{2n+1} = \varepsilon_{2n+1}$ pour $n \geq 1$, avec $\varepsilon_k = 1$ si $k \equiv 2 \bmod 3$ et 0 sinon. En passant aux séries génératrices, nous avons $u(z) = \varepsilon(z) + u(z^2)$ ie $u(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^3} + u(z^2)$. D'après le résultat général, (u_n) réduite modulo une puissance de 2 est 2-automatique. En fait elle est 2-automatique modulo n'importe quoi. En effet, si nous écrivons $n = 2^N(2p+1)$, nous pouvons dire que $u_n = 0$ si $p \equiv 0 \bmod 3$, $u_n = (-1)^N \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ si $p \equiv 1 \bmod 3$ et $u_n = (-1)^{N-1}(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1)$ si $p \equiv 2 \bmod 3$. Comme u_n ne dépend que de N et p, la suite est 2-automatique dans la mesure où elle prend un

48

nombre fini de valeurs. Ainsi elle est 2-automatique modulo m, pour tout m. D'ailleurs un 2-automate pour la suite réduite modulo m est, en notant α_N le résidu de $(-1)^N\lfloor\frac{N+1}{2}\rfloor$ modulo m et β_N le résidu de $(-1)^{N-1}(\lfloor\frac{N}{2}\rfloor - 1)$ modulo m:



Dans tous les exemples de suites d'entiers que nous avons rencontrés, l'ensemble des entiers m tels que, réduite modulo m, la suite soit p-automatique (p est un nombre premier), est l'ensemble vide, ou l'ensemble des puissances de p ,ou enfin l'ensemble des naturels non nuls. Cependant cet ensemble peut être d'un autre type. D'abord, en notant (u_n) la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers, la suite $(2^K u_n)$ est 2-automatique modulo 1, 2, 4, ..., 2^K, mais pas modulo 2^{K+1}. Ensuite nous pourrions employer le même truc pour avoir une suite 2-automatique modulo les puissances de 2 et quelques puissances de 3.

Il semble plus intéressant de chercher des contre-exemples moins artificiels. Prenons la suite du nombre de palindromes sans préfixes sur un alphabet à 3 lettres. Nous savons qu'elle est 2-automatique quand on la réduit modulo 2^N, mais aussi quand on la réduit modulo 3^N. Il est fort douteux qu'elle soit 2-automatique quand on la réduit modulo 5^N, par exemple; mais nous butons ici sur un problème: comment montrer qu'une suite qui vérifie une équation de Mahler n'est pas automatique? La question est posée.

Pour terminer remarquons que d'autres exemples de suites, qui ont toutes les chances d'être automatiques, échappent à notre analyse. Ainsi Ph. Flajolet et H. Prodinger ont ils étudié le nombre H_n de mots $n_1 n_2 \ldots n_k$ sur $\mathbb{N}_+$ tels que $n_1 = 1$, $1 \le n_j \le 2n_{j-1}$ pour $1 < j \le k$ et $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Pour cela ils établissent une équation de Malher pour une série génératrice bivariée:

$$H(q,u) = qu + \frac{uq}{1 - uq} [H(q,1) - H(q,q^2u^2)]$$

et $H(q,1) = H(q) := \sum_{n\geq 0} H_n q^n$. La résolution de l'équation amène $H(q) = \frac{a(q)}{1 - b(q)}$ avec

$$a(q) = \sum_{j\geq 1} (-1)^{j+1} \frac{q^{2^{j+1}-2-j}}{(1-q)(1-q^3)(1-q^7)\ldots(1-q^{2^{j-1}-1})}$$

et

$$b(q) = \sum_{j\geq 1} (-1)^{j+1} \frac{q^{2^{j+1}-2-j}}{(1-q)(1-q^3)(1-q^7)\ldots(1-q^{2^{j}-1})} .$$

La forme de ces expressions incite à penser que (H_n) est 2-automatique.

50

Bibliographie

Les deux articles de base sur les suites automatiques sont

[Cob.] A. Cobham
Uniform tag sequences
Mathem. Sys. Theory, t.6, 1972, 164-192

[CKMR] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France, G. Rauzy
Suites algébriques, automates et substitutions
Bull. Soc. Math. France, 108, 1980, 401-419

Une excellente présentation de la situation est donnée dans

[All.] J.P. Allouche
Automates finis en théorie des nombres
Expo. Math. 5 (1987), 329-266

Pour tout ce qui concerne automates et machines le standard est

[Eil.Vol.A] S. Eilenberg
Automata, languages and machines
Academic Press 1974

Les matrices T_r de la partie IV apparaissent déjà dans

J.P. Allouche B. Rande L. Thimonier
Transcendental generating functions with coefficients generated by automata
STACS (Bordeaux 1988)
Lectures Notes in Computer Sciences n°294, p.170-183

Les partitions binaires ont fait l'objet de nombreux articles, par exemple

R.F. Churchouse
Congruences properties of the binary partition function
Proc.Camb.Phil.Soc. (1969),66,371

L'étude des palindromes sans préfixes est faite dans

J.Beauquier L.Thimonier

Prefix-free words of length n over m letters: two-sided well balanced parentheses an palindroms

in Lectures Notes in Mathematics 1234

Combinatoire énumérative Springer Verlag

Les mots à bords ont été étudiés dans

M. Régnier

Enumeration of bordered words

Rapport de recherche INRIA n°956 Déc. 1988

La recherche de la période d'une suite de $\mathbb{Z}/_{p^n}\mathbb{Z}$ de fonction génératrice rationnelle est limpidement présentée dans

[KW] H. Kwong

Periodicities of a class of infinite integer sequences modulo M

Journal of Number Theory 31, 64-79 (1989)

La dernière suite citée apparaît dans

Ph. Flajolet H. Prodinger

Level number sequences for trees

Rapport de recherche INRIA n°484 Janvier 1986

Table des matières

53

RAPPORTS INTERNES AU LABORATOIRE

ANNEE 89

n° 463 **FINKEL A**
DETECTION AND AVOIDANCE OF DEADLOCKS FOR PROTOCOLS

21 PAGES

n° 464 **FINKEL A**
REDUCED REACHABILITY ANALYSIS OF FINITE AND INFINITE STATE SYSTEMS

23 PAGES

n° 465 **PETIT A**
CHARACTERIZATION OF RECOGNIZABLE TRACE LANGUAGES BY DISTRIBUTED AUTOMATA
31 PAGES

n° 466 **DELORME C**
CALCUL DE L'INDICE DE TRANSMISSION DE QUELQUES GRAPHES GEODESIQUES

11 PAGES

n° 467 **FLAJOLET P / SORIA M**
GENERAL COMBINATORIAL SCHEMAS WITH GAUSSIAN LIMIT DISTRIBUTIONS AND EXPONENTIAL TAILS
20 PAGES

n° 468 **FALLER B**
COMPILATIONS ADAPTATIVES DE SYSTEMES DE REGLES DE PRODUCTION UTILISANT DES SESSIONS TYPIQUES : LE SYSTEME METRO
24 PAGES

n° 469 **GAUDEL M C**
LE GENIE LOGICIEL

64 PAGES

n° 470 **ANANTHARAMAN S / MZALI J**
UNFAILING COMPLETION MODULO A SET OF EQUATIONS

16 PAGES

n° 471 **FINKEL A / JOHNEN C**
THE HOME STATE PROBLEM IN TRANSITION SYSTEMS

10 PAGES

n° 472 **FAVARON O / MAULINO C / ORDAZ O**
HAMILTONIAN PROPERTIES OF BIPARTITE GRAPHS AND DIGRAPHS WITH BIPARTITE INDEPENDENCE 2
17 PAGES

n° 473 **SALOTTI S**
FLOU ET REPRESENTATION CENTREE OBJET POUR RAISONNER PAR ANALOGIE : LE SYSTEME FLORAN
18 PAGES

n° 474 **LOISEAU S**
COCO : UN SYSTEME DE VALIDATION DES BASES DE CONNAISSANCES

69 PAGES

n° 475 **PUGET J F**
EVALUATION PARTIELLE DES ECHECS EN PROLOG

20 PAGES

n° 476 **GENIET D**
COMPACTING AND SYNCHRONIZING NON-DETERMINISTIC FINITE AUTOMATA WITH AUTOMAF TM
13 PAGES

n° 477 **JOUANNAUD J P / KIRCHNER C / KIRCHNER H / MEGRELIS A**
PROGRAMMING WITH EQUALITIES, SUBSORTS, OVERLOADING AND PARAMETERIZATION IN OBJ
22 PAGES

n° 478 **DERSHOWITZ N / JOUANNAUD J P**
REWRITE SYSTEMS

145 PAGES

n° 479 **KANNAN S / SANTHA M**
A PROBABILISTIC ALGORITHM FOR MERGING TWO SORTED LISTS

11 PAGES

n° 480 **GENIET D / SCHOTT R / THIMONIER L**
UNE MESURE MARKOVIENNE DU PARALLELISME

35 PAGES

n° 481 **MOURLIN F / COURNARIE E**
A GRAPHICAL ENVIRONMENT FOR OCCAM PROGRAMMING

13 PAGES

n° 482 **DELORME C**
CONSTRUCTION DE GRAPHES POSSEDANT DES ROUTAGES DE PLUS COURT CHEMIN CHARGEANT EGALEMENT LES ARETES
10 PAGES

n° 483 **KAPLAN S / CHOPPY C**
ABSTRACT REWRITING WITH CONCRETE OPERATORS

12 PAGES

n° 484 **KOUIDER M**
COVERING VERTICES BY CYCLES

20 PAGES

n° 485 **FRANOVA M**
EXPLANATIONS PROVIDED BY CONSTRUCTIVE MATCHING IN INDUCTIVE THEOREM PROVING
27 PAGES

n° 486 **FALLER B**
EFFICACITE DES SYSTEMES DE REGLES DE PRODUCTION : TECHNIQUES DE COMPILATION ET D'ADAPTATION, ET METHODES DE COMPARAISON
28 PAGES

n° 487 **DIDAY E / KODRATOFF Y**
2EMES JOURNEES SYMBOLIQUE NUMERIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DE CONNAISSANCES A PARTIR DE DONNEES
163 PAGES

n° 488 **MANOUSSAKIS Y**
A LINEAR ALGORITHM FOR FINDING HAMILTONIAN CYCLES IN TOURNAMENTS

6 PAGES

n° 489 **BEAUQUIER J / CHOQUET A / PETIT A / VIDAL-NAQUET G**
UNBOUNDED NETS OF PROCESSORS

33 PAGES

n° 490 **FAVARON O / HARTNELL B**
ON WELL-K-COVERED GRAPHS

11 PAGES

n° 491 **MANOUSSAKIS Y**
HAMILTONIAN PATHS AND CYCLES, NUMBER OF ARCS AND INDEPENDENCE NUMBER IN DIGRAPHS
16 PAGES

n° 492 **DAUCHY P**
SPECIFICATION ALGEBRIQUE ET PROTOTYPAGE DE LA FONCTION DE DETECTION DE SURVITESSE DE MAGGALY
33 PAGES

n° 493 **FOUQUET J L / THUILLIER H**
DECOMPOSITION OF 3-CONNECTED CUBIC GRAPHS

34 PAGES

n° 494 **BOUDET A**
A NEW COMBINATION TECHNIQUE FOR AC UNIFICATION

20 PAGES 06/1989

n° 495 **PAN Q B**
ON THE COMPLEXITY OF RECURSIVE PATH ORDERING AND RECURSIVE DECOMPOSITION ORDERING

15 PAGES 06/1989

n° 496 **HEYDEMANN M C / MEYER J C / OPATRNY J / SOTTEAU D**
FORWARDING INDICES OF CONSISTENT ROUTINGS AND THEIR COMPLEXITY

14 PAGES 06/1989

n° 497 **CZACHORSKI T**
A DIFFUSION PROCESS WITH INSTANTANOUS JUMPS BACK AND ITS IMPLEMENTATIONS IN COMPUTER SYSTEMS ANALYSIS

39 PAGES 06/1989

n° 498 **TUZA Z**
EXTENSIONS OF GALLAI'S GRAPH COVERING THEOREMS FOR UNIFORM HYPERGRAPHS

11 PAGES 06/1989

n° 499 **FERNANDEZ DE LA VEGA W / MANOUSSAKIS Y**
ON THE FORWARDING INDEX OF COMMUNICATION NETWORKS WITH GIVEN CONNECTIVITY

21 PAGES 06/1989

n° 500 **FLANDRIN E / LI H**
CHVATAL-ERDOS CONDITION IN 3-CONNECTED CLAW-FREE GRAPHS

23 PAGES 06/1989

n° 501 **FINKEL A**
A MINIMAL COVERABILITY GRAPH FOR PETRI NETS

27 PAGES 06/1989

n° 502 **MILLOT D / VAUTHERIN J**
TRUE PARALLELISM ON AN UNKNOWN TOPOLOGY

18 PAGES 07/1989

n° 503 **FRUTOS ESCRIG D / JOHNEN C**
DECIDABILITY OF HOME SPACE PROPERTY

19 PAGES 07/1989

n° 504 **VINCENT J M**
STABILITY CONDITION OF A SERVICE SYSTEM WITH PRECEDENCE CONSTRAINTS BETWEEN TASKS

15 PAGES 07/1989

n° 505 **FERNANDEZ DE LA VEGA W / SANTHA M**
AN AVERAGE CASE LOWER BOUND FOR INSERTIVE MERGING

12 PAGES 07/1989

n° 506 **FERNANDEZ DE LA VEGA W**
GRIDS IN RANDOM GRAPHS

13 PAGES 07/1989

n° 507 **KODRATOFF Y**
CHARACTERISING MACHINE LEARNING PROGRAMS, A EUROPEAN COMPILATION

48 PAGES 08/1989

n° 508 **BREZILLON P / BAU D Y**
ELABORATION DU SYSTEME EXPERT EXPLICATIF SEPT : CHOIX DU COUPLAGE ENTRE LE SIMULATEUR ET LE DIAGNOSTIQUEUR

28 PAGES 08/1989

n° 509 **LI H / VIRLOUVET C**
NEIGHBORHOOD CONDITIONS FOR CLAW-FREE HAMILTONIAN GRAPHS

13 PAGES 09/1989

n° 510 **GELENBE E / FOURNEAU J M / THEVENIN P**
DEADLOCK AND THRASHING IN A FLEXIBLE MANUFACTURING SYSTEM

12 PAGES 09/1989

n° 511 **KONIG J C / TRYSTRAM D**
OPTIMAL SCHEDULING ALGORITHMS FOR LINEAR ALGEBRA DAGs

21 PAGES 09/1989

n° 512 **BERNAS P**
ETUDE STATIQUE DE SPECIFICATIONS ALGEBRIQUES

33 PAGES 09/1989

n° 513 **MARCHE C**
COMPLETION MODULO ASSOCIATIVITE, COMMUTATIVITE ET ELEMENT NEUTRE

51 PAGES 09/1989

n° 514 **GENIET D**
MESURES DE PARALLELISME AVEC AUTOMAF

28 PAGES 09/1989

n° 515 **STAFYLOPATIS A N / PASCHOS V T**
THE EXECUTION OF RECURSIVE DEFINITIONS ON FOREST-LIKE STRUCTURED DATABASES

32 PAGES 09/1989

n° 516 **DELORME C**
COMPTER LES CHEMINS FERMES DANS UN ARBRE

14 PAGES 09/1989

n° 517 **FAVARON O / MAHEO M / SACLE J F**
SOME RESULTS ON CONJECTURES OF GRAFFITI - I

23 PAGES 09/1989

n° 518 **LOISEAU S / ROUSSET M C**
CARACTERISATION DE LA NOTION D'ANOMALIES D'UNE BASE DE CONNAISSANCES EN TERME DE LIENS DE DEPENDANCES
31 PAGES 09/1989

n° 519 **DELORME C / HAMIDOUNE Y O**
ON PRODUCTS OF SETS IN GROUPS
11 PAGES 09/1989

n° 520 **GENIET D**
ON THE COMPUTATION OF A CONCURRENCE MEASURE
20 PAGES 10/1989

n° 521 **MYOUPO J F / THUENTE M**
TRANSITIVE CLOSURE ON LINEAR SYSTOLIC ARRAYS
18 PAGES 10/1989

n° 522 **CERIN C**
GITEX, PAPS : DEUX LOGICIELS MANIPULANT POSTSCRIPT ET LATEX
21 PAGES 10/1989

n° 523 **FINKEL A**
REDUCTION AND COVERING OF INFINITE REACHABILITY TREES
53 PAGES 10/1989

n° 524 **FRANOVA M**
PRECOMAS USER'S GUIDE
146 PAGES 10/1989

n° 525 **KODRATOFF Y / FRANOVA M**
PROGRAM SYNTHESIS, WHAT FOR ?
74 PAGES 10/1989

n° 526 **HEYDEMANN M C / OPATRNY J / SOTTEAU D**
BROADCASTING AND SPANNING TREES IN DE BRUIJN AND KAUTZ NETWORKS
16 PAGES 11/1989

n° 527 **BERTHELOT G / JOHNEN C / PETRUCCI L**
PAPETRI : POSTE D'ANALYSE DES RESEAUX DE PETRI
27 PAGES 11/1989

n° 528 **NICAUD J F / SAIDI M**
EXPLANATION OF ALGEBRAIC REASONING : THE APLUSIX SYSTEM
20 PAGES 11/1989

n° 529 **MANOUSSAKIS Y G / PASCHOS V TH**
ON THE COMPLEXITY OF SOME HAMILTONIAN PROBLEMS IN EDGE-COLOURED COMPLETE GRAPHS
20 PAGES 11/1989

n° 530 **KODRATOFF Y**

A FIRST PROPOSAL FOR IMPLEMENTING KNOWLEDGE INTENSIVE AND DECLARATIVE PATTERN RECOGNITION WITH THE HELP OF EXISTING MACHINE LEARNING TECHNIQUES

31 PAGES 11/1989

n° 531 **ZHANG K M / MANOUSSAKIS Y / SONG Z M**

COMPLEMENTARY CYCLES CONTAINING A FIXED ARC IN DIREGULAR BIPARTITE TOURNAMENTS

11 PAGES 12/1989

n° 532 **GOUYOU-BEAUCHAMPS D**

TABLEAUX DE HAVENDER STANDARDS

23 PAGES 12/1989