

```
[> read "telesc.mpl";
```

▼ Hermite reduction

▼ Central binomial coefficients

```
[> f:=1/(1-x-y);
```

$$f := \frac{1}{1-x-y} \quad (1.1.1)$$

```
[> f:=normal(subs(y=t/x,f)/x);
```

$$f := -\frac{1}{x^2+t-x} \quad (1.1.2)$$

```
[> Q:=denom(f);
```

$$Q := x^2+t-x \quad (1.1.3)$$

```
[> F[0]:=f;
```

$$F_0 := -\frac{1}{x^2+t-x} \quad (1.1.4)$$

```
[> diff(F[0],t);
```

$$\frac{1}{(x^2+t-x)^2} \quad (1.1.5)$$

```
[> gcdex(Q,diff(Q,x),x,'U','V');
```

$$1 \quad (1.1.6)$$

```
[> U,V;
```

$$\frac{4}{4t-1}, -\frac{2x}{4t-1} + \frac{1}{4t-1} \quad (1.1.7)$$

check:

```
[> normal(U*Q+V*diff(Q,x));
```

$$1 \quad (1.1.8)$$

```
[> U+diff(V,x);
```

$$\frac{2}{4t-1} \quad (1.1.9)$$

```
[> F[1]:=%/Q;
```

$$F_1 := \frac{2}{(4t-1)(x^2+t-x)} \quad (1.1.10)$$

Find a linear relation

```
[> solve(F[1]+a[0]*F[0],a[0]);
```

$$\frac{2}{4t-1} \quad (1.1.11)$$

Conclusion

```
[> deq:=diff(y(t),t)+%/y(t);
```

$$deq := \frac{d}{dt} y(t) + \frac{2y(t)}{4t-1} \quad (1.1.12)$$

```
[> dsolve({deq,y(0)=1},y(t));
```

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{4t-1}} \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned}
&> \text{series}(1/\sqrt{1-4*t}, t, 10); \\
&1 + 2t + 6t^2 + 20t^3 + 70t^4 + 252t^5 + 924t^6 + 3432t^7 + 12870t^8 + 48620t^9 \quad (1.1.14) \\
&+ O(t^{10})
\end{aligned}$$

2d rook paths

$$\begin{aligned}
&> f:=1/(1-x/(1-x)-y/(1-y)); \\
&f := \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}} \quad (1.2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> f:=\text{normal}(\text{subs}(y=t/x, f)/x); \\
&f := \frac{(-1+x)(-x+t)}{x(3tx-2x^2-2t+x)} \quad (1.2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> Q:=\text{denom}(f); \\
&Q := x(3tx-2x^2-2t+x) \quad (1.2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \text{gcdex}(Q, \text{diff}(Q, x), x, 'U', 'V'); \\
&1 \quad (1.2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> U, V; \\
&\frac{3(9t^2-6t+1)x}{t^2(9t^2-10t+1)} - \frac{27t^3-18t^2-6t+1}{t^2(9t^2-10t+1)}, -\frac{(9t^2-6t+1)x^2}{t^2(9t^2-10t+1)} \\
&+ \frac{(27t^3-15t^2-5t+1)x}{2t^2(9t^2-10t+1)} - \frac{1}{2t} \quad (1.2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \text{normal}(U*Q+V*\text{diff}(Q, x)); \\
&1 \quad (1.2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> F[0]:=f; \\
&F_0 := \frac{(-1+x)(-x+t)}{x(3tx-2x^2-2t+x)} \quad (1.2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> df0:=\text{normal}(\text{diff}(F[0], t)); \\
&df0 := \frac{(-1+x)^2}{(3tx-2x^2-2t+x)^2} \quad (1.2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> P:=df0*Q^2; \\
&P := (-1+x)^2 x^2 \quad (1.2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> P*U+\text{diff}(P*V, x); \\
&(-1+x)^2 x^2 \left(\frac{3(9t^2-6t+1)x}{t^2(9t^2-10t+1)} - \frac{27t^3-18t^2-6t+1}{t^2(9t^2-10t+1)} \right) + 2(-1+x)^2 x^2 \left(-\frac{(9t^2-6t+1)x^2}{t^2(9t^2-10t+1)} + \frac{(27t^3-15t^2-5t+1)x}{2t^2(9t^2-10t+1)} - \frac{1}{2t} \right) \\
&+ 2(-1+x)^2 x \left(-\frac{(9t^2-6t+1)x^2}{t^2(9t^2-10t+1)} + \frac{(27t^3-15t^2-5t+1)x}{2t^2(9t^2-10t+1)} - \frac{1}{2t} \right) + (-1+x)^2 x^2 \left(-\frac{2(9t^2-6t+1)x}{t^2(9t^2-10t+1)} \right) \quad (1.2.10)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{27t^3 - 15t^2 - 5t + 1}{2t^2(9t^2 - 10t + 1)}$$

> **collect(% , x, normal);**

$$- \frac{3(9t^2 - 6t + 1)x^5}{t^2(9t^2 - 10t + 1)} + \frac{(81t^3 + 33t^2 - 61t + 11)x^4}{2t^2(9t^2 - 10t + 1)} \quad (1.2.11)$$

$$- \frac{(72t^3 - 35t^2 - 12t + 3)x^3}{t^2(9t^2 - 10t + 1)} + \frac{(81t^3 - 69t^2 + 3t + 1)x^2}{2t^2(9t^2 - 10t + 1)} - \frac{x}{t}$$

> **degree(% , x);**

$$5 \quad (1.2.12)$$

> **F[1]:=rem(%%, Q, x)/Q;**

$$F_1 := - \frac{2}{(9t-1)(3tx-2x^2-2t+x)} \quad (1.2.13)$$

No quadratic term in the numerator, cannot be linearly dependent with F[0]

> **df1:=normal(diff(F[1], t));**

$$df1 := \frac{4(27tx - 9x^2 - 18t + 3x + 1)}{(9t-1)^2(3tx-2x^2-2t+x)^2} \quad (1.2.14)$$

> **P:=df1*Q^2;**

$$P := \frac{4(27tx - 9x^2 - 18t + 3x + 1)x^2}{(9t-1)^2} \quad (1.2.15)$$

> **F[2]:=rem(P*U+diff(P*V, x), Q, x)/Q;**

$$F_2 := \frac{4(9t-7)}{(9t^2-10t+1)(9t-1)(3tx-2x^2-2t+x)} \quad (1.2.16)$$

> **M:=Matrix(3, 3, (i, j)->coeff(collect(F[i-1]*Q, x), x, j-1));**

$$M := \begin{bmatrix} -t & 1+t & -1 \\ 0 & -\frac{2}{9t-1} & 0 \\ 0 & \frac{4(9t-7)}{(9t^2-10t+1)(9t-1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.17)$$

Clearly of rank 2

> **LinearAlgebra[NullSpace](LinearAlgebra[Transpose](M))[1];**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2(9t-7)}{9t^2-10t+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.18)$$

> **deq:=add(%[i]*diff(y(t), [t\$(i-1)]), i=1..3);**

$$deq := \frac{2(9t-7) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)}{9t^2-10t+1} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1.2.19)$$

> **dsolve({deq, y(0)=1, D(y)(0)=2}, y(t));**

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{t-1}}{2\sqrt{9t-1}} \quad (1.2.20)$$

```
> gfun[diffeqtoec]({deq,y(0)=1,D(y)(0)=2},y(t),u(n));
{9 n u(n) + (-10 n - 14) u(n + 1) + (n + 2) u(n + 2), u(0) = 1, u(1) = 2} (1.2.21)
```

```
> gfun:-rectoproc(% ,u(n),list)(30);
[1, 2, 14, 106, 838, 6802, 56190, 470010, 3968310, 33747490, 288654574,
2480593546, 21400729382, 185239360178, 1607913963614,
13991107041306, 122002082809110, 1065855419418690,
9327252391907790, 81744134786314410, 717367363052796678,
6303080714967178962, 55442415802430586174, 488166038461550194746,
4302218944630062062838, 37947642101127770120802,
334977761601783084811950, 2959107762596925411599050,
26157526097740725747576550, 231368076739562525423902450,
20476839328226690652874600990] (1.2.22)
```

Decomposition by Linear Algebra

```
> Q := t*z^3 + x^2*y + x*y^2 - x*y*z;
      Q := t z^3 + x^2 y + x y^2 - x y z (2.1)
```

```
> vars:=[x,y,z]; # t is a parameter
      vars := [x, y, z] (2.2)
```

```
> polys:=map2(diff,Q,vars);
      polys := [2 x y + y^2 - y z, x^2 + 2 x y - x z, 3 t z^2 - x y] (2.3)
```

```
> P:=x^3+z^3;
      P := x^3 + z^3 (2.4)
```

```
> deg:=degree(P,vars);
      deg := 3 (2.5)
```

We'll be reducing polynomials of degree up to deg:

```
> Mons:=map(expand,series(1/(1-t*x)/(1-t*y)/(1-t*z),t,deg+1));
Mons := 1 + (x + y + z) t + (x^2 + x y + x z + y^2 + y z + z^2) t^2 + (x^3 + x^2 y + x^2 z
+ x y^2 + x y z + x z^2 + y^3 + y^2 z + y z^2 + z^3) t^3 + O(t^4) (2.6)
```

```
> for i from 0 to deg do monomials[i]:=[op(coeff(Mons,t,i))] od;
      monomials_0 := [1]
      monomials_1 := [x, y, z]
      monomials_2 := [x^2, x y, x z, y^2, y z, z^2]
      monomials_3 := [x^3, x^2 y, x^2 z, x y^2, x y z, x z^2, y^3, y^2 z, y z^2, z^3] (2.7)
```

```
> vecP:=poltovec(P,vars,monomials[deg]);
      vecP := [ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ] (2.8)
```

Check:

```
> add(vecP[i]*monomials[deg][i],i=1..nops(monomials[deg]));
      x^3 + z^3 (2.9)
```

```
> M:=LinearAlgebra['Transpose'](<seq(seq(poltovec(mm*p,vars,
monomials[deg]),mm=monomials[deg-degree(Q,vars)+1]),p=pols)>);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

```
> rd,cd:=LinearAlgebra[Dimensions](M);
      rd,cd := 10,9
```

(2.11)

```
> indsr,indsc,A:=extractmaxminor(M);
"Rank Macaulay matrix: 9"

indsr,indsc,A := [1,2,3,4,5,6,7,8,9],[1,2,3,4,5,6,7,8,9],
```

(2.12)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t & 0 \end{bmatrix}$$

```
> vecP[indsr];
      [ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
```

(2.13)

```
> decomp:=A^(-1).LinearAlgebra[Transpose](%);
```

(2.14)

$$decomp := \begin{bmatrix} -\frac{2(6t-1)}{9t} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{6t-1}{9t} \\ 1 \\ \frac{1}{3t} \\ 0 \\ \frac{24t-1}{9t} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

```
> V:=vectopols(decomp,vars,monomials[deg-degree(Q,vars)+1],
indsc);
```

$$V := -\frac{2(6t-1)x}{9t}, z + \frac{(6t-1)y}{9t} + x, \frac{(24t-1)z}{9t} + \frac{x}{3t} \quad (2.15)$$

Check:

```
> add(V[i]*pols[i],i=1..3);
```

$$-\frac{2(6t-1)x(2xy+y^2-yz)}{9t} + \left(z + \frac{(6t-1)y}{9t} + x\right)(x^2 + 2xy - xz) + \left(\frac{(24t-1)z}{9t} + \frac{x}{3t}\right)(3tz^2 - xy) \quad (2.16)$$

```
> R:=collect(%-P,vars,distributed,normal);
```

$$R := \left(8t - \frac{4}{3}\right)z^3 \quad (2.17)$$

Random rational functions

In 1 variable (could be done by Hermite reduction)

```
> F:=randpoly([x],degree=0)/(1-t*randpoly([x],degree=2));
```

$$F := -\frac{8}{1-t(-29x^2+95x+11)} \quad (3.1.1)$$

Homogenize in degree -2:

```
> H:=normal(subs(x=x/y,F)/y^2);
```

$$H := -\frac{8}{29tx^2-95txy-11ty^2+y^2} \quad (3.1.2)$$

```
> reduction(H,denom(H),[x,y]);
```

$$-\frac{8}{29tx^2-95txy-11ty^2+y^2} \quad (3.1.3)$$

```
> reduction(diff(H,t),denom(H),[x,y]);
```

```
"Size Macaulay matrix in degree 2: 3 x 4"
```

```
"Rank Macaulay matrix: 3"
```

$$\frac{8(10301t - 58)}{(10301t - 116)t(29tx^2 - 95txy - 11ty^2 + y^2)} \quad (3.1.4)$$

```
> telesc(H,[x,y],t);  
"Bound on the order", 1  
"Trying order:", 1
```

$$(10301t^2 - 116t)Dt + 10301t - 58 \quad (3.1.5)$$

```
> F:=randpoly([x],degree=2)/(1-t*randpoly([x],degree=4));
```

$$F := \frac{-7x^2 + 22x - 55}{1 - t(-94x^4 + 87x^3 - 56x^2 - 62)} \quad (3.1.6)$$

```
Homogenize in degree -2:
```

```
> H:=normal(subs(x=x/y,F)/y^2);
```

$$H := -\frac{7x^2 - 22xy + 55y^2}{94tx^4 - 87tx^3y + 56tx^2y^2 + 62ty^4 + y^4} \quad (3.1.7)$$

```
> telesc(H,[x,y],t);  
"Bound on the order", 3  
"Trying order:", 1  
"Size Macaulay matrix in degree 6: 7 x 8"  
"Rank Macaulay matrix: 7"  
"Trying order:", 2  
"Trying order:", 3
```

$$\begin{aligned} & (34656[\dots 67 \text{ digits} \dots]50784t^{15} + 51487[\dots 66 \text{ digits} \dots]13504t^{14} \\ & + 34333[\dots 65 \text{ digits} \dots]59728t^{13} + 13483[\dots 64 \text{ digits} \dots]99456t^{12} \\ & + 34319[\dots 62 \text{ digits} \dots]20188t^{11} + 58479[\dots 60 \text{ digits} \dots]58356t^{10} \\ & + 65921[\dots 58 \text{ digits} \dots]46497t^9 + 45499[\dots 56 \text{ digits} \dots]42928t^8 \\ & + 13980[\dots 54 \text{ digits} \dots]08352t^7 - 33260[\dots 51 \text{ digits} \dots]86848t^6 \\ & - 35970[\dots 49 \text{ digits} \dots]22912t^5 - 31785[\dots 46 \text{ digits} \dots]41728t^4 \\ & + 24129[\dots 44 \text{ digits} \dots]98656t^3)Dt^3 + (31190[\dots 68 \text{ digits} \dots]57056t^{14} \\ & + 43177[\dots 67 \text{ digits} \dots]24096t^{13} + 26709[\dots 66 \text{ digits} \dots]72688t^{12} \\ & + 96692[\dots 64 \text{ digits} \dots]78816t^{11} + 22472[\dots 63 \text{ digits} \dots]47068t^{10} \\ & + 34427[\dots 61 \text{ digits} \dots]36988t^9 + 33873[\dots 59 \text{ digits} \dots]61221t^8 \\ & + 18874[\dots 57 \text{ digits} \dots]66312t^7 + 26636[\dots 54 \text{ digits} \dots]00032t^6 \\ & - 31839[\dots 52 \text{ digits} \dots]39136t^5 - 15691[\dots 50 \text{ digits} \dots]53216t^4 \\ & + 32495[\dots 46 \text{ digits} \dots]85600t^3 + 10858[\dots 45 \text{ digits} \dots]93952t^2)Dt^2 \\ & + (62381[\dots 68 \text{ digits} \dots]14112t^{13} + 80030[\dots 67 \text{ digits} \dots]53312t^{12} \\ & + 45572[\dots 66 \text{ digits} \dots]65824t^{11} + 15021[\dots 65 \text{ digits} \dots]35744t^{10} \\ & + 31212[\dots 63 \text{ digits} \dots]91640t^9 + 41331[\dots 61 \text{ digits} \dots]65448t^8 \\ & + 32549[\dots 59 \text{ digits} \dots]89590t^7 + 10674[\dots 57 \text{ digits} \dots]37568t^6 \\ & - 42631[\dots 54 \text{ digits} \dots]94688t^5 - 48829[\dots 52 \text{ digits} \dots]34976t^4 \\ & - 96565[\dots 49 \text{ digits} \dots]39008t^3 + 28380[\dots 47 \text{ digits} \dots]27040t^2 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

```

+ 76911[...44 digits...]33216 t) Dt + 20793[...68 digits...]04704 t12
+ 24568[...67 digits...]86144 t11 + 12753[...66 digits...]78816 t10
+ 37641[...64 digits...]24960 t9 + 67782[...62 digits...]38184 t8
+ 72561[...60 digits...]23528 t7 + 36892[...58 digits...]59218 t6
- 63598[...55 digits...]04720 t5 - 18411[...54 digits...]52448 t4
- 71767[...51 digits...]37376 t3 + 47968[...48 digits...]33088 t2
+ 60057[...46 digits...]92000 t + 22620[...43 digits...]18624

```

```

> collect(%,Dt,degree);
15 Dt3 + 14 Dt2 + 13 Dt + 12 (3.1.9)

```

In 2 variables

```

> F:=randpoly([x,y],degree=0)/(1-t*randpoly([x,y],degree=3,
dense));
F := 10 / (1 - t (7 x3 - 89 x2 y + 12 x y2 + 50 y3 + 65 x2 - 25 x y - 60 y2 - 96 x
- 42 y + 7)) (3.2.1)

```

Homogenize in degree -3:

```

> H:=normal(subs(x=x/z,y=y/z,F)/z^3);
H := -10 / (7 t x3 - 89 t x2 y + 65 t x2 z + 12 t x y2 - 25 t x y z - 96 t z2 x
+ 50 t y3 - 60 t y2 z - 42 y t z2 + 7 t z3 - z3) (3.2.2)

```

```

> telesc(H,[x,y,z],t);
"Bound on the order", 2
"Trying order:", 1
"Size Macaulay matrix in degree 3: 10 x 9"
"Rank Macaulay matrix: 9"
"Trying order:", 2
"Size Macaulay matrix in degree 6: 28 x 45"
"Rank Macaulay matrix: 28"
(14837[...30 digits...]05316 t8 - 47617[...29 digits...]44941 t7
- 71717[...28 digits...]01874 t6 + 80321[...27 digits...]32489 t5
+ 62624[...25 digits...]84770 t4 + 62336[...23 digits...]51520 t3
+ 679352559140739278078648506800 t2) Dt2 + (59349[...30 digits...]21264 t7
- 26310[...30 digits...]92289 t6 - 24772[...29 digits...]66220 t5
+ 24239[...28 digits...]40987 t4 + 14804[...26 digits...]07840 t3
+ 75488[...23 digits...]37520 t2 + 13587[...21 digits...]13600 t) Dt
+ 29674[...30 digits...]10632 t6 - 16786[...30 digits...]02407 t5
- 10347[...29 digits...]98172 t4 + 81346[...27 digits...]68969 t3
+ 30436[...25 digits...]72760 t2 - 18568[...23 digits...]73120 t
+ 150967235364608728461921890400 (3.2.3)

```

Higher degree:

```

> F:=randpoly([x,y],degree=1)/(1-t*randpoly([x,y],degree=4,
dense)); (3.2.4)

```


$$F := (-42x - 33y + 21) / (1 - t(-35x^4 + 97x^3y - 64x^2y^2 + 59xy^3 + 87y^4 + 30x^3 + 89x^2y - 69xy^2 - 34y^3 - 16x^2 - 46xy + 40y^2 - 33x + 77y + 1)) \quad (3.2.4)$$

Homogenize in degree -3:

```
> H:=normal(subs(x=x/z,y=y/z,F)/z^3);
```

$$H := -(3(14x + 11y - 7z)) / (35tx^4 - 97tx^3y - 30tx^3z + 64tx^2y^2 - 89tx^2yz + 16tx^2z^2 - 59txy^3 + 69txy^2z + 46txyz^2 + 33txz^3 - 87ty^4 + 34y^3zt - 40y^2z^2t - 77yz^3t - z^4t + z^4) \quad (3.2.5)$$

```
> telesc(H,[x,y,z],t);
"Bound on the order", 6
"Trying order:", 1
"Size Macaulay matrix in degree 5: 21 x 18"
"Rank Macaulay matrix: 18"
"Trying order:", 2
"Size Macaulay matrix in degree 9: 55 x 84"
"Rank Macaulay matrix: 55"
"Trying order:", 3
"Trying order:", 4
"Trying order:", 5
"Trying order:", 6
```

$$-37899[\dots 508 \text{ digits} \dots]88800t + 83618[\dots 606 \text{ digits} \dots]58944t^{47} \quad (3.2.6)$$

$$- 49348[\dots 598 \text{ digits} \dots]62800t^{41} - 10486[\dots 597 \text{ digits} \dots]15040t^{40}$$

$$- 70700[\dots 571 \text{ digits} \dots]59232t^{27} + 10308[\dots 574 \text{ digits} \dots]98120t^{28}$$

$$+ 39137[\dots 611 \text{ digits} \dots]18896t^{49} - 57491[\dots 577 \text{ digits} \dots]58680t^{30}$$

$$- 84481[\dots 606 \text{ digits} \dots]53392t^{46} - 67637[\dots 552 \text{ digits} \dots]13760t^{18}$$

$$- 25893[\dots 614 \text{ digits} \dots]14400t^{51} - 15409[\dots 616 \text{ digits} \dots]36192t^{52}$$

$$- 48287[\dots 617 \text{ digits} \dots]26832t^{53} + 82465[\dots 579 \text{ digits} \dots]73088t^{31}$$

$$- 24989[\dots 570 \text{ digits} \dots]51848t^{26} + 20031[\dots 567 \text{ digits} \dots]82872t^{25}$$

$$+ 13859[\dots 566 \text{ digits} \dots]12096t^{24} + 11643[\dots 564 \text{ digits} \dots]22080t^{23}$$

$$+ 28831[\dots 612 \text{ digits} \dots]80096t^{50} + 29658[\dots 562 \text{ digits} \dots]73360t^{22}$$

$$+ 84814[\dots 559 \text{ digits} \dots]08112t^{21} - 64626[\dots 557 \text{ digits} \dots]33216t^{20}$$

$$- 16006[\dots 605 \text{ digits} \dots]36096t^{45} + 30869[\dots 603 \text{ digits} \dots]37744t^{44}$$

$$+ 15009[\dots 602 \text{ digits} \dots]00992t^{43} + 10453[\dots 600 \text{ digits} \dots]54384t^{42}$$

$$- 41246[\dots 575 \text{ digits} \dots]29360t^{29} + 50483[\dots 555 \text{ digits} \dots]03456t^{19}$$

$$- 51595[\dots 512 \text{ digits} \dots]54880t^2 + (41613[\dots 631 \text{ digits} \dots]38361t^{72}$$

$$- 13483[\dots 630 \text{ digits} \dots]64002t^{71} - 13850[\dots 629 \text{ digits} \dots]86013t^{70}$$

$$+ 11495[\dots 628 \text{ digits} \dots]50186t^{69} - 28945[\dots 626 \text{ digits} \dots]96389t^{68}$$

$$- 20479[\dots 625 \text{ digits} \dots]59400t^{67} - 97651[\dots 623 \text{ digits} \dots]18342t^{66}$$

$$- 13436[\dots 621 \text{ digits} \dots]76680t^{65} + 33789[\dots 621 \text{ digits} \dots]38395t^{64}$$

$$- 15149[\dots 620 \text{ digits} \dots]44310t^{63} + 62838[\dots 618 \text{ digits} \dots]42063t^{62}$$

$$\begin{aligned}
& + 27640[\dots 617 \text{ digits} \dots]34606 t^{61} + 28437[\dots 616 \text{ digits} \dots]99925 t^{60} \\
& + 53930[\dots 614 \text{ digits} \dots]62776 t^{59} + 10399[\dots 613 \text{ digits} \dots]40976 t^{58} \\
& - 35480[\dots 611 \text{ digits} \dots]50216 t^{57} - 24751[\dots 610 \text{ digits} \dots]12818 t^{56} \\
& - 13059[\dots 609 \text{ digits} \dots]92916 t^{55} - 90484[\dots 606 \text{ digits} \dots]59114 t^{54} \\
& - 91601[\dots 602 \text{ digits} \dots]02780 t^{53} + 12389[\dots 604 \text{ digits} \dots]73614 t^{52} \\
& + 30431[\dots 602 \text{ digits} \dots]60816 t^{51} + 69182[\dots 600 \text{ digits} \dots]17788 t^{50} \\
& - 98184[\dots 598 \text{ digits} \dots]60336 t^{49} - 16176[\dots 597 \text{ digits} \dots]50698 t^{48} \\
& - 47745[\dots 595 \text{ digits} \dots]80876 t^{47} + 35009[\dots 594 \text{ digits} \dots]92646 t^{46} \\
& + 37767[\dots 592 \text{ digits} \dots]64636 t^{45} - 25185[\dots 590 \text{ digits} \dots]89398 t^{44} \\
& - 17386[\dots 589 \text{ digits} \dots]49072 t^{43} - 76640[\dots 586 \text{ digits} \dots]01848 t^{42} \\
& + 62445[\dots 585 \text{ digits} \dots]94640 t^{41} + 40453[\dots 583 \text{ digits} \dots]13157 t^{40} \\
& - 12735[\dots 582 \text{ digits} \dots]16330 t^{39} - 83251[\dots 579 \text{ digits} \dots]34361 t^{38} \\
& + 98608[\dots 577 \text{ digits} \dots]13906 t^{37} - 85147[\dots 575 \text{ digits} \dots]37241 t^{36} \\
& - 19516[\dots 574 \text{ digits} \dots]91688 t^{35} + 16592[\dots 572 \text{ digits} \dots]65498 t^{34} \\
& + 89488[\dots 569 \text{ digits} \dots]84952 t^{33} + 71325[\dots 566 \text{ digits} \dots]12223 t^{32} \\
& + 40496[\dots 566 \text{ digits} \dots]84098 t^{31} + 20806[\dots 564 \text{ digits} \dots]56619 t^{30} \\
& - 13430[\dots 562 \text{ digits} \dots]29578 t^{29} + 26112[\dots 560 \text{ digits} \dots]98513 t^{28} \\
& + 14949[\dots 558 \text{ digits} \dots]25112 t^{27} - 24710[\dots 556 \text{ digits} \dots]76968 t^{26} \\
& + 13258[\dots 554 \text{ digits} \dots]41912 t^{25} + 73520[\dots 551 \text{ digits} \dots]98212 t^{24} \\
& - 20212[\dots 550 \text{ digits} \dots]38944 t^{23} + 27866[\dots 548 \text{ digits} \dots]97728 t^{22} \\
& - 35547[\dots 545 \text{ digits} \dots]51936 t^{21} - 11520[\dots 543 \text{ digits} \dots]90816 t^{20} \\
& + 50330[\dots 541 \text{ digits} \dots]59040 t^{19} - 40740[\dots 539 \text{ digits} \dots]66336 t^{18} \\
& + 32306[\dots 536 \text{ digits} \dots]96576 t^{17} + 75196[\dots 534 \text{ digits} \dots]97472 t^{16} \\
& + 75808[\dots 531 \text{ digits} \dots]92992 t^{15} + 36325[\dots 530 \text{ digits} \dots]41504 t^{14} \\
& + 13317[\dots 528 \text{ digits} \dots]53504 t^{13} + 55163[\dots 524 \text{ digits} \dots]32032 t^{12} \\
& - 65600[\dots 522 \text{ digits} \dots]08096 t^{11} - 94978[\dots 519 \text{ digits} \dots]82016 t^{10} \\
& + 42529[\dots 516 \text{ digits} \dots]62720 t^9 + 18860[\dots 514 \text{ digits} \dots]89120 t^8 \\
& + 20981[\dots 510 \text{ digits} \dots]98400 t^7 + 59202[\dots 505 \text{ digits} \dots]98400 t^6) Dt^6 \\
& + (14980[\dots 633 \text{ digits} \dots]80996 t^{71} - 69888[\dots 631 \text{ digits} \dots]07617 t^{70} \\
& - 44062[\dots 630 \text{ digits} \dots]27205 t^{69} + 46177[\dots 629 \text{ digits} \dots]28147 t^{68} \\
& - 11738[\dots 628 \text{ digits} \dots]87822 t^{67} - 94701[\dots 626 \text{ digits} \dots]98108 t^{66} \\
& - 20743[\dots 625 \text{ digits} \dots]03462 t^{65} + 90106[\dots 623 \text{ digits} \dots]98328 t^{64} \\
& + 80861[\dots 622 \text{ digits} \dots]03596 t^{63} - 38515[\dots 621 \text{ digits} \dots]00551 t^{62} \\
& + 13771[\dots 620 \text{ digits} \dots]28847 t^{61} + 15120[\dots 619 \text{ digits} \dots]91749 t^{60} \\
& + 82327[\dots 617 \text{ digits} \dots]10990 t^{59} + 15635[\dots 616 \text{ digits} \dots]62712 t^{58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 62627[\dots 613 \text{ digits} \dots]61208 t^{57} - 23768[\dots 613 \text{ digits} \dots]23340 t^{56} \\
& - 90848[\dots 611 \text{ digits} \dots]44792 t^{55} - 28748[\dots 610 \text{ digits} \dots]83642 t^{54} \\
& - 67825[\dots 607 \text{ digits} \dots]30202 t^{53} + 11542[\dots 607 \text{ digits} \dots]12366 t^{52} \\
& + 43635[\dots 605 \text{ digits} \dots]93300 t^{51} + 48798[\dots 603 \text{ digits} \dots]84264 t^{50} \\
& + 21210[\dots 601 \text{ digits} \dots]79964 t^{49} - 28450[\dots 600 \text{ digits} \dots]91440 t^{48} \\
& + 62367[\dots 597 \text{ digits} \dots]22456 t^{47} + 32943[\dots 596 \text{ digits} \dots]82370 t^{46} \\
& + 65949[\dots 595 \text{ digits} \dots]43014 t^{45} + 69788[\dots 593 \text{ digits} \dots]26330 t^{44} \\
& - 10112[\dots 592 \text{ digits} \dots]84708 t^{43} - 37795[\dots 590 \text{ digits} \dots]83888 t^{42} \\
& - 15111[\dots 588 \text{ digits} \dots]94248 t^{41} + 14416[\dots 587 \text{ digits} \dots]07496 t^{40} \\
& + 13691[\dots 585 \text{ digits} \dots]55764 t^{39} - 33015[\dots 583 \text{ digits} \dots]67349 t^{38} \\
& - 40758[\dots 581 \text{ digits} \dots]39105 t^{37} + 24122[\dots 579 \text{ digits} \dots]39407 t^{36} \\
& + 94394[\dots 576 \text{ digits} \dots]52410 t^{35} - 48057[\dots 575 \text{ digits} \dots]55404 t^{34} \\
& + 44728[\dots 573 \text{ digits} \dots]45114 t^{33} + 78675[\dots 571 \text{ digits} \dots]78648 t^{32} \\
& - 10125[\dots 569 \text{ digits} \dots]48612 t^{31} + 47294[\dots 567 \text{ digits} \dots]09237 t^{30} \\
& + 74262[\dots 565 \text{ digits} \dots]79563 t^{29} - 54603[\dots 563 \text{ digits} \dots]03631 t^{28} \\
& - 10502[\dots 561 \text{ digits} \dots]51626 t^{27} + 54865[\dots 559 \text{ digits} \dots]94392 t^{26} \\
& - 48678[\dots 557 \text{ digits} \dots]62800 t^{25} + 33541[\dots 554 \text{ digits} \dots]27204 t^{24} \\
& + 63060[\dots 553 \text{ digits} \dots]09248 t^{23} - 39622[\dots 551 \text{ digits} \dots]82304 t^{22} \\
& + 28190[\dots 549 \text{ digits} \dots]39424 t^{21} + 35298[\dots 546 \text{ digits} \dots]52256 t^{20} \\
& - 11871[\dots 545 \text{ digits} \dots]71136 t^{19} + 75714[\dots 542 \text{ digits} \dots]40640 t^{18} \\
& - 25643[\dots 540 \text{ digits} \dots]49824 t^{17} + 30273[\dots 537 \text{ digits} \dots]70368 t^{16} \\
& + 15862[\dots 536 \text{ digits} \dots]92128 t^{15} + 20891[\dots 533 \text{ digits} \dots]73952 t^{14} \\
& + 34755[\dots 531 \text{ digits} \dots]59168 t^{13} + 13617[\dots 529 \text{ digits} \dots]64128 t^{12} \\
& + 75516[\dots 525 \text{ digits} \dots]11904 t^{11} - 76765[\dots 523 \text{ digits} \dots]18208 t^{10} \\
& - 12140[\dots 521 \text{ digits} \dots]43008 t^9 + 49545[\dots 517 \text{ digits} \dots]00480 t^8 \\
& + 26313[\dots 515 \text{ digits} \dots]99680 t^7 + 30397[\dots 511 \text{ digits} \dots]28000 t^6 \\
& + 88803[\dots 506 \text{ digits} \dots]76000 t^5) D t^5 + (18725[\dots 634 \text{ digits} \dots]62450 t^{70} \\
& - 11404[\dots 633 \text{ digits} \dots]89525 t^{69} - 43595[\dots 631 \text{ digits} \dots]16667 t^{68} \\
& + 64073[\dots 630 \text{ digits} \dots]41763 t^{67} - 19272[\dots 629 \text{ digits} \dots]16888 t^{66} \\
& - 13026[\dots 628 \text{ digits} \dots]87580 t^{65} - 11363[\dots 626 \text{ digits} \dots]89270 t^{64} \\
& + 22631[\dots 625 \text{ digits} \dots]82520 t^{63} + 51984[\dots 623 \text{ digits} \dots]13834 t^{62} \\
& - 46122[\dots 622 \text{ digits} \dots]05763 t^{61} + 16937[\dots 621 \text{ digits} \dots]36717 t^{60} \\
& + 23314[\dots 620 \text{ digits} \dots]72261 t^{59} + 85972[\dots 618 \text{ digits} \dots]84820 t^{58} \\
& + 97098[\dots 616 \text{ digits} \dots]54344 t^{57} - 46509[\dots 615 \text{ digits} \dots]08440 t^{56} \\
& - 35968[\dots 614 \text{ digits} \dots]34956 t^{55} - 10346[\dots 613 \text{ digits} \dots]14756 t^{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 17199[\dots 611 \text{ digits} \dots]84002 t^{53} + 28460[\dots 609 \text{ digits} \dots]59434 t^{52} \\
& + 19995[\dots 608 \text{ digits} \dots]47310 t^{51} + 41058[\dots 606 \text{ digits} \dots]12320 t^{50} \\
& - 11220[\dots 604 \text{ digits} \dots]06040 t^{49} - 13701[\dots 603 \text{ digits} \dots]98756 t^{48} \\
& - 18975[\dots 601 \text{ digits} \dots]73968 t^{47} + 82122[\dots 599 \text{ digits} \dots]37284 t^{46} \\
& + 18525[\dots 598 \text{ digits} \dots]13130 t^{45} + 28789[\dots 596 \text{ digits} \dots]67234 t^{44} \\
& - 55606[\dots 593 \text{ digits} \dots]58182 t^{43} - 10623[\dots 593 \text{ digits} \dots]01928 t^{42} \\
& - 14376[\dots 591 \text{ digits} \dots]06192 t^{41} + 57327[\dots 588 \text{ digits} \dots]10424 t^{40} \\
& + 86283[\dots 587 \text{ digits} \dots]06536 t^{39} + 85769[\dots 585 \text{ digits} \dots]58266 t^{38} \\
& - 25054[\dots 584 \text{ digits} \dots]83001 t^{37} - 44586[\dots 582 \text{ digits} \dots]00783 t^{36} \\
& + 13079[\dots 580 \text{ digits} \dots]84063 t^{35} + 42726[\dots 578 \text{ digits} \dots]50168 t^{34} \\
& - 18168[\dots 576 \text{ digits} \dots]59948 t^{33} + 10921[\dots 574 \text{ digits} \dots]62410 t^{32} \\
& + 76979[\dots 572 \text{ digits} \dots]26488 t^{31} + 12059[\dots 570 \text{ digits} \dots]48146 t^{30} \\
& - 19337[\dots 567 \text{ digits} \dots]25239 t^{29} + 46972[\dots 566 \text{ digits} \dots]79281 t^{28} \\
& - 36063[\dots 564 \text{ digits} \dots]34127 t^{27} - 47931[\dots 562 \text{ digits} \dots]08044 t^{26} \\
& + 54371[\dots 560 \text{ digits} \dots]55368 t^{25} - 24200[\dots 556 \text{ digits} \dots]19600 t^{24} \\
& - 15107[\dots 556 \text{ digits} \dots]13020 t^{23} + 53832[\dots 554 \text{ digits} \dots]46584 t^{22} \\
& - 21493[\dots 552 \text{ digits} \dots]13120 t^{21} + 92148[\dots 548 \text{ digits} \dots]71456 t^{20} \\
& + 82274[\dots 547 \text{ digits} \dots]88928 t^{19} - 90236[\dots 545 \text{ digits} \dots]76256 t^{18} \\
& + 35095[\dots 543 \text{ digits} \dots]26016 t^{17} + 12439[\dots 541 \text{ digits} \dots]69632 t^{16} \\
& + 11020[\dots 538 \text{ digits} \dots]93440 t^{15} + 95216[\dots 536 \text{ digits} \dots]43680 t^{14} \\
& + 19363[\dots 534 \text{ digits} \dots]16096 t^{13} + 50129[\dots 531 \text{ digits} \dots]81024 t^{12} \\
& + 20812[\dots 529 \text{ digits} \dots]22336 t^{11} + 22653[\dots 526 \text{ digits} \dots]63072 t^{10} \\
& - 20387[\dots 524 \text{ digits} \dots]93952 t^9 - 38707[\dots 521 \text{ digits} \dots]63552 t^8 \\
& + 12202[\dots 518 \text{ digits} \dots]66240 t^7 + 10018[\dots 516 \text{ digits} \dots]61280 t^6 \\
& + 12326[\dots 512 \text{ digits} \dots]04800 t^5 + 37963[\dots 507 \text{ digits} \dots]22400 t^4) Dt^4 \\
& + (99871[\dots 634 \text{ digits} \dots]66400 t^{69} - 75057[\dots 633 \text{ digits} \dots]13800 t^{68} \\
& - 14868[\dots 632 \text{ digits} \dots]56872 t^{67} + 37210[\dots 631 \text{ digits} \dots]41452 t^{66} \\
& - 14234[\dots 630 \text{ digits} \dots]05324 t^{65} - 68371[\dots 628 \text{ digits} \dots]43752 t^{64} \\
& + 19628[\dots 626 \text{ digits} \dots]47436 t^{63} + 16761[\dots 626 \text{ digits} \dots]68136 t^{62} \\
& + 99937[\dots 622 \text{ digits} \dots]90388 t^{61} - 26686[\dots 623 \text{ digits} \dots]94416 t^{60} \\
& + 12522[\dots 622 \text{ digits} \dots]86828 t^{59} + 14282[\dots 621 \text{ digits} \dots]22604 t^{58} \\
& + 36209[\dots 619 \text{ digits} \dots]67976 t^{57} - 10761[\dots 617 \text{ digits} \dots]00512 t^{56} \\
& - 40118[\dots 616 \text{ digits} \dots]60544 t^{55} - 19168[\dots 615 \text{ digits} \dots]70928 t^{54} \\
& - 43437[\dots 613 \text{ digits} \dots]07152 t^{53} - 12256[\dots 611 \text{ digits} \dots]45584 t^{52} \\
& + 31229[\dots 610 \text{ digits} \dots]20160 t^{51} + 10570[\dots 609 \text{ digits} \dots]63288 t^{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 93602[\dots606 \text{ digits}\dots]52408 t^{49} - 36833[\dots605 \text{ digits}\dots]46544 t^{48} \\
& - 92783[\dots603 \text{ digits}\dots]00088 t^{47} + 38897[\dots601 \text{ digits}\dots]40880 t^{46} \\
& + 69945[\dots600 \text{ digits}\dots]23416 t^{45} + 10432[\dots599 \text{ digits}\dots]19584 t^{44} \\
& - 57273[\dots596 \text{ digits}\dots]47960 t^{43} - 36224[\dots595 \text{ digits}\dots]12552 t^{42} \\
& - 30153[\dots593 \text{ digits}\dots]08192 t^{41} + 68648[\dots591 \text{ digits}\dots]22848 t^{40} \\
& + 12833[\dots590 \text{ digits}\dots]54864 t^{39} + 27431[\dots587 \text{ digits}\dots]88032 t^{38} \\
& - 14630[\dots586 \text{ digits}\dots]29360 t^{37} - 59019[\dots584 \text{ digits}\dots]00936 t^{36} \\
& - 11121[\dots583 \text{ digits}\dots]96312 t^{35} + 10359[\dots580 \text{ digits}\dots]55932 t^{34} \\
& + 19305[\dots579 \text{ digits}\dots]37876 t^{33} + 57678[\dots576 \text{ digits}\dots]02552 t^{32} \\
& - 30491[\dots574 \text{ digits}\dots]29108 t^{31} + 18863[\dots573 \text{ digits}\dots]89992 t^{30} \\
& + 11980[\dots571 \text{ digits}\dots]00788 t^{29} - 91211[\dots568 \text{ digits}\dots]24240 t^{28} \\
& + 39703[\dots566 \text{ digits}\dots]96172 t^{27} - 26103[\dots564 \text{ digits}\dots]50756 t^{26} \\
& - 17372[\dots563 \text{ digits}\dots]98280 t^{25} + 16361[\dots561 \text{ digits}\dots]12224 t^{24} \\
& + 14156[\dots559 \text{ digits}\dots]04272 t^{23} - 67245[\dots556 \text{ digits}\dots]97104 t^{22} \\
& + 11696[\dots555 \text{ digits}\dots]35360 t^{21} - 36061[\dots552 \text{ digits}\dots]90752 t^{20} \\
& - 36453[\dots550 \text{ digits}\dots]56096 t^{19} + 30825[\dots548 \text{ digits}\dots]02848 t^{18} \\
& - 11825[\dots546 \text{ digits}\dots]78720 t^{17} + 71593[\dots543 \text{ digits}\dots]43648 t^{16} \\
& + 84958[\dots541 \text{ digits}\dots]04832 t^{15} + 55401[\dots538 \text{ digits}\dots]36096 t^{14} \\
& + 16189[\dots537 \text{ digits}\dots]88640 t^{13} + 57678[\dots534 \text{ digits}\dots]23456 t^{12} \\
& - 65988[\dots531 \text{ digits}\dots]63424 t^{11} - 45809[\dots529 \text{ digits}\dots]80128 t^{10} \\
& - 87095[\dots525 \text{ digits}\dots]67648 t^9 - 34661[\dots523 \text{ digits}\dots]44512 t^8 \\
& - 21578[\dots521 \text{ digits}\dots]46912 t^7 - 35768[\dots517 \text{ digits}\dots]64160 t^6 \\
& + 10574[\dots516 \text{ digits}\dots]71680 t^5 + 14842[\dots512 \text{ digits}\dots]28800 t^4 \\
& + 50174[\dots507 \text{ digits}\dots]14400 t^3) D t^3 + (22471[\dots635 \text{ digits}\dots]49400 t^{68} \\
& - 20090[\dots634 \text{ digits}\dots]37800 t^{67} - 95122[\dots631 \text{ digits}\dots]64624 t^{66} \\
& + 88552[\dots631 \text{ digits}\dots]49932 t^{65} - 43942[\dots630 \text{ digits}\dots]42668 t^{64} \\
& - 13302[\dots629 \text{ digits}\dots]09072 t^{63} + 24723[\dots627 \text{ digits}\dots]99420 t^{62} \\
& + 43817[\dots626 \text{ digits}\dots]55904 t^{61} - 62024[\dots624 \text{ digits}\dots]87908 t^{60} \\
& - 61377[\dots623 \text{ digits}\dots]68760 t^{59} + 41219[\dots622 \text{ digits}\dots]96420 t^{58} \\
& + 35140[\dots621 \text{ digits}\dots]39476 t^{57} + 52990[\dots619 \text{ digits}\dots]81032 t^{56} \\
& - 16293[\dots618 \text{ digits}\dots]64912 t^{55} - 11308[\dots617 \text{ digits}\dots]67520 t^{54} \\
& - 37764[\dots615 \text{ digits}\dots]54512 t^{53} - 60269[\dots613 \text{ digits}\dots]25888 t^{52} \\
& + 11205[\dots612 \text{ digits}\dots]67856 t^{51} + 90046[\dots610 \text{ digits}\dots]80176 t^{50} \\
& + 18914[\dots609 \text{ digits}\dots]13880 t^{49} - 11972[\dots607 \text{ digits}\dots]29448 t^{48} \\
& - 12782[\dots606 \text{ digits}\dots]75232 t^{47} - 12567[\dots604 \text{ digits}\dots]49080 t^{46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 48028[\dots 602 \text{ digits} \dots]59264 t^{45} + 17267[\dots 601 \text{ digits} \dots]09864 t^{44} \\
& + 99750[\dots 598 \text{ digits} \dots]06064 t^{43} - 47442[\dots 597 \text{ digits} \dots]98024 t^{42} \\
& - 92172[\dots 595 \text{ digits} \dots]99672 t^{41} + 29790[\dots 593 \text{ digits} \dots]08192 t^{40} \\
& + 31810[\dots 592 \text{ digits} \dots]59808 t^{39} + 26342[\dots 590 \text{ digits} \dots]30000 t^{38} \\
& - 57846[\dots 588 \text{ digits} \dots]64480 t^{37} - 11922[\dots 587 \text{ digits} \dots]50232 t^{36} \\
& - 19785[\dots 584 \text{ digits} \dots]54920 t^{35} + 47946[\dots 582 \text{ digits} \dots]54496 t^{34} \\
& - 38216[\dots 579 \text{ digits} \dots]06692 t^{33} + 12938[\dots 579 \text{ digits} \dots]90868 t^{32} \\
& + 21865[\dots 577 \text{ digits} \dots]62000 t^{31} + 39515[\dots 574 \text{ digits} \dots]50492 t^{30} \\
& + 58594[\dots 572 \text{ digits} \dots]99488 t^{29} + 13259[\dots 571 \text{ digits} \dots]56828 t^{28} \\
& - 11973[\dots 569 \text{ digits} \dots]71800 t^{27} - 10108[\dots 567 \text{ digits} \dots]71836 t^{26} \\
& + 12055[\dots 565 \text{ digits} \dots]86276 t^{25} - 43769[\dots 562 \text{ digits} \dots]65896 t^{24} \\
& + 12346[\dots 561 \text{ digits} \dots]67472 t^{23} + 25183[\dots 559 \text{ digits} \dots]78544 t^{22} \\
& - 37655[\dots 556 \text{ digits} \dots]66096 t^{21} + 58554[\dots 554 \text{ digits} \dots]98176 t^{20} \\
& - 17611[\dots 552 \text{ digits} \dots]46368 t^{19} - 58468[\dots 550 \text{ digits} \dots]69248 t^{18} \\
& + 32114[\dots 548 \text{ digits} \dots]27264 t^{17} + 10688[\dots 546 \text{ digits} \dots]57216 t^{16} \\
& + 94168[\dots 543 \text{ digits} \dots]78560 t^{15} + 12378[\dots 542 \text{ digits} \dots]65344 t^{14} \\
& + 15325[\dots 539 \text{ digits} \dots]69664 t^{13} - 38864[\dots 535 \text{ digits} \dots]49664 t^{12} \\
& + 33210[\dots 534 \text{ digits} \dots]45536 t^{11} - 38394[\dots 530 \text{ digits} \dots]90208 t^{10} \\
& - 47067[\dots 529 \text{ digits} \dots]08128 t^9 - 48490[\dots 526 \text{ digits} \dots]40576 t^8 \\
& + 89783[\dots 523 \text{ digits} \dots]05216 t^7 + 14382[\dots 521 \text{ digits} \dots]82496 t^6 \\
& - 13040[\dots 518 \text{ digits} \dots]16320 t^5 + 15060[\dots 515 \text{ digits} \dots]28160 t^4 \\
& + 35099[\dots 511 \text{ digits} \dots]45600 t^3 + 14839[\dots 507 \text{ digits} \dots]88800 t^2) Dt^2 \\
& + (17976[\dots 635 \text{ digits} \dots]19520 t^{67} - 18634[\dots 634 \text{ digits} \dots]15640 t^{66} \\
& + 15608[\dots 632 \text{ digits} \dots]12008 t^{65} + 72126[\dots 631 \text{ digits} \dots]78160 t^{64} \\
& - 46634[\dots 630 \text{ digits} \dots]03368 t^{63} - 72780[\dots 628 \text{ digits} \dots]49952 t^{62} \\
& + 37150[\dots 627 \text{ digits} \dots]94712 t^{61} + 35951[\dots 626 \text{ digits} \dots]34128 t^{60} \\
& - 10503[\dots 625 \text{ digits} \dots]02952 t^{59} - 41996[\dots 623 \text{ digits} \dots]04280 t^{58} \\
& + 45956[\dots 622 \text{ digits} \dots]83488 t^{57} + 29022[\dots 621 \text{ digits} \dots]49408 t^{56} \\
& + 12902[\dots 619 \text{ digits} \dots]50320 t^{55} - 22511[\dots 618 \text{ digits} \dots]50608 t^{54} \\
& - 97570[\dots 616 \text{ digits} \dots]58048 t^{53} - 23455[\dots 615 \text{ digits} \dots]71200 t^{52} \\
& - 14241[\dots 613 \text{ digits} \dots]66752 t^{51} + 17498[\dots 612 \text{ digits} \dots]32944 t^{50} \\
& + 72723[\dots 610 \text{ digits} \dots]77968 t^{49} + 86164[\dots 608 \text{ digits} \dots]96416 t^{48} \\
& - 33547[\dots 607 \text{ digits} \dots]11376 t^{47} - 11401[\dots 606 \text{ digits} \dots]66336 t^{46} \\
& + 31314[\dots 603 \text{ digits} \dots]72528 t^{45} + 69249[\dots 602 \text{ digits} \dots]46368 t^{44} \\
& + 11465[\dots 601 \text{ digits} \dots]51312 t^{43} - 10404[\dots 599 \text{ digits} \dots]94896 t^{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 56040[\dots597 \text{ digits}\dots]33632 t^{41} - 31687[\dots595 \text{ digits}\dots]93184 t^{40} \\
& + 12605[\dots594 \text{ digits}\dots]45856 t^{39} + 23034[\dots592 \text{ digits}\dots]15616 t^{38} \\
& - 53215[\dots589 \text{ digits}\dots]19808 t^{37} - 65441[\dots588 \text{ digits}\dots]32640 t^{36} \\
& - 80851[\dots586 \text{ digits}\dots]98432 t^{35} + 30990[\dots584 \text{ digits}\dots]02472 t^{34} \\
& + 14024[\dots583 \text{ digits}\dots]32552 t^{33} + 31974[\dots580 \text{ digits}\dots]95664 t^{32} \\
& - 62643[\dots578 \text{ digits}\dots]60648 t^{31} + 88105[\dots576 \text{ digits}\dots]41056 t^{30} \\
& + 12542[\dots575 \text{ digits}\dots]20792 t^{29} - 55219[\dots572 \text{ digits}\dots]31216 t^{28} \\
& - 68406[\dots570 \text{ digits}\dots]20616 t^{27} - 93299[\dots567 \text{ digits}\dots]45784 t^{26} \\
& - 37721[\dots566 \text{ digits}\dots]88224 t^{25} + 10239[\dots565 \text{ digits}\dots]32000 t^{24} \\
& + 15136[\dots563 \text{ digits}\dots]22672 t^{23} + 24132[\dots560 \text{ digits}\dots]79664 t^{22} \\
& + 42196[\dots558 \text{ digits}\dots]21120 t^{21} + 28250[\dots556 \text{ digits}\dots]78848 t^{20} \\
& + 59819[\dots553 \text{ digits}\dots]06848 t^{19} - 68139[\dots551 \text{ digits}\dots]01536 t^{18} \\
& - 11553[\dots550 \text{ digits}\dots]76288 t^{17} + 98806[\dots547 \text{ digits}\dots]49760 t^{16} \\
& + 10625[\dots546 \text{ digits}\dots]55328 t^{15} + 65056[\dots543 \text{ digits}\dots]32032 t^{14} \\
& + 57125[\dots541 \text{ digits}\dots]93312 t^{13} + 12212[\dots539 \text{ digits}\dots]73248 t^{12} \\
& - 60165[\dots536 \text{ digits}\dots]31776 t^{11} - 13988[\dots534 \text{ digits}\dots]42208 t^{10} \\
& + 25954[\dots531 \text{ digits}\dots]99424 t^9 + 33043[\dots528 \text{ digits}\dots]60288 t^8 \\
& - 93249[\dots525 \text{ digits}\dots]58048 t^7 - 90688[\dots522 \text{ digits}\dots]63392 t^6 \\
& + 31526[\dots520 \text{ digits}\dots]42688 t^5 - 49131[\dots516 \text{ digits}\dots]22560 t^4 \\
& - 57956[\dots513 \text{ digits}\dots]50720 t^3 + 21300[\dots508 \text{ digits}\dots]84800 t^2 \\
& + 18732[\dots505 \text{ digits}\dots]78400 t) Dt + 12774[\dots582 \text{ digits}\dots]72760 t^{32} \\
& + 10799[\dots584 \text{ digits}\dots]29960 t^{33} + 10131[\dots585 \text{ digits}\dots]05008 t^{34} \\
& - 10765[\dots588 \text{ digits}\dots]86272 t^{35} - 12503[\dots551 \text{ digits}\dots]51712 t^{17} \\
& + 24052[\dots549 \text{ digits}\dots]83968 t^{16} + 10621[\dots547 \text{ digits}\dots]89088 t^{15} \\
& + 13889[\dots545 \text{ digits}\dots]51040 t^{14} + 29961[\dots634 \text{ digits}\dots]19920 t^{66} \\
& - 35326[\dots633 \text{ digits}\dots]06840 t^{65} + 71487[\dots631 \text{ digits}\dots]64792 t^{64} \\
& + 11642[\dots631 \text{ digits}\dots]68416 t^{63} - 99055[\dots629 \text{ digits}\dots]83224 t^{62} \\
& - 32230[\dots627 \text{ digits}\dots]97360 t^{61} + 88950[\dots626 \text{ digits}\dots]60968 t^{60} \\
& + 96834[\dots542 \text{ digits}\dots]17216 t^{13} + 44654[\dots540 \text{ digits}\dots]12768 t^{12} \\
& + 16716[\dots538 \text{ digits}\dots]65056 t^{11} - 25963[\dots535 \text{ digits}\dots]64128 t^{10} \\
& - 17037[\dots533 \text{ digits}\dots]78048 t^9 - 56242[\dots529 \text{ digits}\dots]81760 t^8 \\
& + 39557[\dots527 \text{ digits}\dots]27552 t^7 + 18454[\dots524 \text{ digits}\dots]29568 t^6 \\
& - 50681[\dots521 \text{ digits}\dots]74848 t^5 + 87312[\dots518 \text{ digits}\dots]21632 t^4 \\
& - 13434[\dots515 \text{ digits}\dots]76640 t^3 - 39603[\dots622 \text{ digits}\dots]27464 t^{57} \\
& - 27099[\dots624 \text{ digits}\dots]68104 t^{58} + 46319[\dots620 \text{ digits}\dots]50496 t^{55}
\end{aligned}$$

```

+ 10008[...622 digits...]65088 t56 - 38147[...618 digits...]12208 t54
+ 10002[...610 digits...]88240 t48 + 54803[...625 digits...]16416 t59
+ 37535[...593 digits...]27072 t38 + 17454[...591 digits...]51936 t37
- 77202[...589 digits...]67200 t36 + 62135[...594 digits...]61536 t39
- 52033[...503 digits...]74400

```

```

> collect(%,Dt,degree);
      72 Dt6 + 71 Dt5 + 70 Dt4 + 69 Dt3 + 68 Dt2 + 67 Dt + 66

```

(3.2.7)

Diagonals

Central multinomial coefficients

```

> F:=1/(1-x-y);
      F :=  $\frac{1}{1-x-y}$ 

```

(4.1.1)

```

> H:=subs(y=t/x,F)/x;
      H :=  $\frac{1}{\left(1-x-\frac{t}{x}\right)x}$ 

```

(4.1.2)

Homogenize in degree -2:

```

> H:=normal(subs(x=x/y,H)/y^2);
      H :=  $-\frac{1}{ty^2+x^2-xy}$ 

```

(4.1.3)

```

> telesc(H,[x,y],t);
"Bound on the order", 1
"Trying order:", 1
"Size Macaulay matrix in degree 2: 3 x 4"
"Rank Macaulay matrix: 3"

```

$$Dt(4t-1) + 2$$

(4.1.4)

```

> DEtools[difop2de](%,[Dt,t],y(t));
      2y(t) + (4t-1)  $\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)$ 

```

(4.1.5)

```

> dsolve(%,y(t));
      y(t) =  $\frac{C1}{\sqrt{4t-1}}$ 

```

(4.1.6)

One more variable:

```

> F:=1/(1-x-y-z);
      F :=  $\frac{1}{1-x-y-z}$ 

```

(4.1.7)

```

> H:=subs(z=t/x/y,F)/x/y;
      H :=  $\frac{1}{\left(1-x-y-\frac{t}{xy}\right)xy}$ 

```

(4.1.8)

```

> normal(%);

```


$$-\frac{1}{x^2 y + x y^2 - x y + t} \quad (4.1.9)$$

Homogenize in degree -3

> **H:=normal(subs(x=x/z,y=y/z,H)/z^3);**

$$H := -\frac{1}{t z^3 + x^2 y + x y^2 - x y z} \quad (4.1.10)$$

> **telesc(H,[x,y,z],t);**

"Bound on the order", 2

"Trying order:", 1

"Size Macaulay matrix in degree 3: 10 x 9"

"Rank Macaulay matrix: 9"

"Trying order:", 2

"Size Macaulay matrix in degree 6: 28 x 45"

"Rank Macaulay matrix: 28"

$$6 + (27 t^2 - t) D t^2 + (54 t - 1) D t \quad (4.1.11)$$

> **gfun[holexprtodiffeq](hypergeom([1/3,2/3],[1],27*t),y(t));**

$$\left\{ 6 y(t) + (54 t - 1) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + (27 t^2 - t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), y(0) = 1 \right\} \quad (4.1.12)$$

Even more?

> **F:=1/(1-x-y-z-u);**

$$F := \frac{1}{1 - x - y - z - u} \quad (4.1.13)$$

> **H:=subs(u=t/x/y/z,F)/x/y/z;**

$$H := \frac{1}{\left(1 - x - y - z - \frac{t}{x y z} \right) x y z} \quad (4.1.14)$$

Homogenize in degree -4

> **H:=normal(subs(x=x/u,y=y/u,z=z/u,H)/u^4);**

$$H := -\frac{1}{t u^4 - u x y z + x^2 y z + x y^2 z + x y z^2} \quad (4.1.15)$$

> **telesc(H,[x,y,z,u],t);**

"Bound on the order", 21

"Trying order:", 1

"Size Macaulay matrix in degree 4: 35 x 16"

"Rank Macaulay matrix: 16"

"Trying order:", 2

"Size Macaulay matrix in degree 8: 165 x 224"

"Rank Macaulay matrix: 147"

"Trying order:", 3

"Trying order:", 4

"Trying order:", 5

"Trying order:", 6

"Trying order:", 7

"Trying order:", 8

$$14709[\dots 33 \text{ digits} \dots] 79000 t + 55565[\dots 176 \text{ digits} \dots] 27168 t^{47} \quad (4.1.16)$$

$$- 13646[\dots 160 \text{ digits} \dots] 76192 t^{41} + 31594[\dots 157 \text{ digits} \dots] 35776 t^{40}$$

$$+ 45218[\dots 120 \text{ digits} \dots] 39840 t^{27} - 38947[\dots 123 \text{ digits} \dots] 93728 t^{28}$$

$$+ 13144[\dots 182 \text{ digits} \dots] 31488 t^{49} - 21787[\dots 129 \text{ digits} \dots] 17888 t^{30}$$

$$\begin{aligned}
& - 94797[\dots 173 \text{ digits} \dots]48064 t^{46} - 41607[\dots 92 \text{ digits} \dots]22368 t^{18} \\
& + [\dots 100 \text{ terms} \dots] - 88344[\dots 228 \text{ digits} \dots]35168 t^{68} \\
& + 69386[\dots 226 \text{ digits} \dots]22848 t^{67} + (23051[\dots 302 \text{ digits} \dots]12000 t^{119} \\
& - 70756[\dots 301 \text{ digits} \dots]08000 t^{118} + 10208[\dots 301 \text{ digits} \dots]25600 t^{117} \\
& - 91065[\dots 299 \text{ digits} \dots]54400 t^{116} + 55169[\dots 298 \text{ digits} \dots]90560 t^{115} \\
& - 23057[\dots 297 \text{ digits} \dots]25440 t^{114} + 60388[\dots 295 \text{ digits} \dots]04192 t^{113} \\
& - 36742[\dots 293 \text{ digits} \dots]58688 t^{112} - 51690[\dots 292 \text{ digits} \dots]15072 t^{111} \\
& + 29600[\dots 291 \text{ digits} \dots]02432 t^{110} + [\dots 89 \text{ terms} \dots] \\
& + 26057[\dots 68 \text{ digits} \dots]34048 t^{20} - 62271[\dots 64 \text{ digits} \dots]95776 t^{19} \\
& - 59963[\dots 60 \text{ digits} \dots]12352 t^{18} + 98019[\dots 57 \text{ digits} \dots]02112 t^{17} \\
& - 31488[\dots 54 \text{ digits} \dots]56800 t^{16} + 36727[\dots 50 \text{ digits} \dots]55520 t^{15} \\
& + 25534[\dots 46 \text{ digits} \dots]94400 t^{14} - 63234[\dots 42 \text{ digits} \dots]53600 t^{13} \\
& - 52336[\dots 38 \text{ digits} \dots]08000 t^{12} - 10602[\dots 34 \text{ digits} \dots]24000 t^{11}) Dt^8 + (\\
& - 70200[\dots 304 \text{ digits} \dots]18400 t^{118} + 21286[\dots 304 \text{ digits} \dots]72800 t^{117} \\
& - 30736[\dots 303 \text{ digits} \dots]22080 t^{116} + 27952[\dots 302 \text{ digits} \dots]35360 t^{115} \\
& - 17777[\dots 301 \text{ digits} \dots]97344 t^{114} + 82419[\dots 299 \text{ digits} \dots]07008 t^{113} \\
& - 27641[\dots 298 \text{ digits} \dots]94432 t^{112} + 60044[\dots 296 \text{ digits} \dots]60640 t^{111} \\
& - 28467[\dots 294 \text{ digits} \dots]46784 t^{110} - 41588[\dots 293 \text{ digits} \dots]21664 t^{109} \\
& + [\dots 90 \text{ terms} \dots] - 21045[\dots 67 \text{ digits} \dots]93248 t^{18} \\
& + 55064[\dots 63 \text{ digits} \dots]22848 t^{17} + 34901[\dots 59 \text{ digits} \dots]18304 t^{16} \\
& - 81167[\dots 56 \text{ digits} \dots]07840 t^{15} + 27233[\dots 53 \text{ digits} \dots]80480 t^{14} \\
& - 31650[\dots 49 \text{ digits} \dots]27520 t^{13} - 27215[\dots 45 \text{ digits} \dots]54400 t^{12} \\
& + 61411[\dots 41 \text{ digits} \dots]79200 t^{11} + 55835[\dots 37 \text{ digits} \dots]32000 t^{10} \\
& + 12119[\dots 33 \text{ digits} \dots]52000 t^9) Dt^7 + (43316[\dots 305 \text{ digits} \dots]86400 t^{117} \\
& - 12352[\dots 305 \text{ digits} \dots]88800 t^{116} + 16725[\dots 304 \text{ digits} \dots]06880 t^{115} \\
& - 14223[\dots 303 \text{ digits} \dots]92160 t^{114} + 84344[\dots 301 \text{ digits} \dots]76064 t^{113} \\
& - 36318[\dots 300 \text{ digits} \dots]91488 t^{112} + 11222[\dots 299 \text{ digits} \dots]62784 t^{111} \\
& - 21754[\dots 297 \text{ digits} \dots]81856 t^{110} + 24923[\dots 294 \text{ digits} \dots]60800 t^{109} \\
& + 17652[\dots 294 \text{ digits} \dots]77312 t^{108} + [\dots 91 \text{ terms} \dots] \\
& + 41576[\dots 65 \text{ digits} \dots]99968 t^{16} - 98822[\dots 61 \text{ digits} \dots]01312 t^{15} \\
& - 13298[\dots 58 \text{ digits} \dots]24160 t^{14} + 17652[\dots 55 \text{ digits} \dots]23040 t^{13} \\
& - 52707[\dots 51 \text{ digits} \dots]44800 t^{12} + 44920[\dots 47 \text{ digits} \dots]44800 t^{11} \\
& + 91874[\dots 43 \text{ digits} \dots]60000 t^{10} - 12909[\dots 40 \text{ digits} \dots]80000 t^9 \\
& - 15456[\dots 36 \text{ digits} \dots]40000 t^8 - 38262[\dots 31 \text{ digits} \dots]80000 t^7) Dt^6 \\
& + (38031[\dots 307 \text{ digits} \dots]46400 t^{116} - 11453[\dots 307 \text{ digits} \dots]36000 t^{115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16421[\dots 306 \text{ digits} \dots]21280 t^{114} - 14822[\dots 305 \text{ digits} \dots]69600 t^{113} \\
& + 93518[\dots 303 \text{ digits} \dots]56544 t^{112} - 42962[\dots 302 \text{ digits} \dots]60000 t^{111} \\
& + 14240[\dots 301 \text{ digits} \dots]88448 t^{110} - 30282[\dots 299 \text{ digits} \dots]77600 t^{109} \\
& + 11395[\dots 297 \text{ digits} \dots]07200 t^{108} + 22337[\dots 296 \text{ digits} \dots]53888 t^{107} \\
& + [\dots 92 \text{ terms} \dots] - 19381[\dots 63 \text{ digits} \dots]64192 t^{14} \\
& - 21000[\dots 59 \text{ digits} \dots]44320 t^{13} + 37258[\dots 56 \text{ digits} \dots]36320 t^{12} \\
& - 11879[\dots 53 \text{ digits} \dots]47520 t^{11} + 56185[\dots 48 \text{ digits} \dots]76000 t^{10} \\
& + 57027[\dots 45 \text{ digits} \dots]74400 t^9 - 11693[\dots 42 \text{ digits} \dots]04000 t^8 \\
& - 84130[\dots 36 \text{ digits} \dots]60000 t^7 + 10120[\dots 34 \text{ digits} \dots]00000 t^6 \\
& + 34919[\dots 29 \text{ digits} \dots]80000 t^5) Dt^5 + (95394[\dots 307 \text{ digits} \dots]60800 t^{115} \\
& - 29878[\dots 307 \text{ digits} \dots]52000 t^{114} + 44523[\dots 306 \text{ digits} \dots]58560 t^{113} \\
& - 41755[\dots 305 \text{ digits} \dots]48800 t^{112} + 27381[\dots 304 \text{ digits} \dots]36448 t^{111} \\
& - 13101[\dots 303 \text{ digits} \dots]53920 t^{110} + 45552[\dots 301 \text{ digits} \dots]02080 t^{109} \\
& - 10459[\dots 300 \text{ digits} \dots]95776 t^{108} + 72865[\dots 297 \text{ digits} \dots]17824 t^{107} \\
& + 62394[\dots 296 \text{ digits} \dots]78976 t^{106} + [\dots 93 \text{ terms} \dots] \\
& - 42622[\dots 60 \text{ digits} \dots]01952 t^{12} + 67660[\dots 57 \text{ digits} \dots]40480 t^{11} \\
& - 23837[\dots 54 \text{ digits} \dots]31680 t^{10} + 90558[\dots 49 \text{ digits} \dots]85600 t^9 \\
& + 19698[\dots 47 \text{ digits} \dots]16000 t^8 - 58778[\dots 43 \text{ digits} \dots]24800 t^7 \\
& + 35382[\dots 39 \text{ digits} \dots]80000 t^6 + 63176[\dots 35 \text{ digits} \dots]18000 t^5 \\
& + 25108[\dots 30 \text{ digits} \dots]67500 t^4 - 58643[\dots 26 \text{ digits} \dots]13750 t^3) Dt^4 + (\\
& - 17497[\dots 309 \text{ digits} \dots]80000 t^{114} + 51836[\dots 308 \text{ digits} \dots]17600 t^{113} \\
& - 73026[\dots 307 \text{ digits} \dots]52000 t^{112} + 64666[\dots 306 \text{ digits} \dots]85120 t^{111} \\
& - 39928[\dots 305 \text{ digits} \dots]28800 t^{110} + 17873[\dots 304 \text{ digits} \dots]45216 t^{109} \\
& - 57159[\dots 302 \text{ digits} \dots]80960 t^{108} + 11309[\dots 301 \text{ digits} \dots]10208 t^{107} \\
& - 25244[\dots 297 \text{ digits} \dots]19392 t^{106} - 10194[\dots 298 \text{ digits} \dots]23232 t^{105} \\
& + [\dots 93 \text{ terms} \dots] - 95048[\dots 61 \text{ digits} \dots]14304 t^{11} \\
& + 72830[\dots 58 \text{ digits} \dots]16800 t^{10} - 21092[\dots 55 \text{ digits} \dots]36480 t^9 \\
& - 71873[\dots 50 \text{ digits} \dots]86560 t^8 + 25117[\dots 48 \text{ digits} \dots]80960 t^7 \\
& - 71263[\dots 44 \text{ digits} \dots]65600 t^6 + 47903[\dots 40 \text{ digits} \dots]06400 t^5 \\
& + 72402[\dots 36 \text{ digits} \dots]85000 t^4 - 55714[\dots 31 \text{ digits} \dots]01625 t^3 \\
& - 96709[\dots 27 \text{ digits} \dots]21250 t^2) Dt^3 + (-61220[\dots 309 \text{ digits} \dots]24000 t^{113} \\
& + 18231[\dots 309 \text{ digits} \dots]58400 t^{112} - 25822[\dots 308 \text{ digits} \dots]96800 t^{111} \\
& + 22991[\dots 307 \text{ digits} \dots]33280 t^{110} - 14276[\dots 306 \text{ digits} \dots]19040 t^{109} \\
& + 64299[\dots 304 \text{ digits} \dots]41984 t^{108} - 20713[\dots 303 \text{ digits} \dots]18080 t^{107} \\
& + 41495[\dots 301 \text{ digits} \dots]52544 t^{106} - 31292[\dots 298 \text{ digits} \dots]53312 t^{105}
\end{aligned}$$

```

- 36472[...298 digits...]78944 t104 + [...93 terms...]
- 26343[...62 digits...]60640 t10 + 16307[...59 digits...]86400 t9
- 41391[...55 digits...]82240 t8 - 36071[...51 digits...]05120 t7
+ 58058[...48 digits...]29280 t6 - 15589[...45 digits...]53600 t5
+ 10303[...41 digits...]43200 t4 + 15311[...37 digits...]01000 t3
- 17461[...32 digits...]67375 t2 - 22561[...28 digits...]12500 t) Dt2 + (
-34894[...309 digits...]28000 t112 + 10390[...309 digits...]92000 t111
- 14709[...308 digits...]36800 t110 + 13088[...307 digits...]19200 t109
- 81180[...305 digits...]78720 t108 + 36494[...304 digits...]77280 t107
- 11716[...303 digits...]84832 t106 + 23273[...301 digits...]32928 t105
- 64231[...297 digits...]57280 t104 - 20992[...298 digits...]31200 t103
+ [...93 terms...] - 10242[...62 digits...]40224 t9
+ 53067[...58 digits...]48640 t8 - 11162[...55 digits...]10080 t7
- 19758[...51 digits...]80160 t6 + 19159[...48 digits...]32160 t5
- 46558[...44 digits...]13600 t4 + 27695[...40 digits...]94400 t3
+ 43848[...36 digits...]05000 t2 - 55298[...31 digits...]09125 t
- 67387[...27 digits...]52500) Dt

```

```
> collect(% ,Dt,degree);
```

$$119 Dt^8 + 118 Dt^7 + 117 Dt^6 + 116 Dt^5 + 115 Dt^4 + 114 Dt^3 + 113 Dt^2 + 112 Dt + 111 \quad (4.1.17)$$

▼ Polya's probability of return in 3d

```
> F:=(u,v)->u*v+v/u+u/v+1/u/v;
```

$$F := (u, v) \mapsto v \cdot u + \frac{v}{u} + \frac{u}{v} + \frac{1}{u \cdot v} \quad (5.1)$$

```
> P:=1/12*(F(x,y)+F(y,z)+F(z,x));
```

$$P := \frac{xy}{12} + \frac{y}{12x} + \frac{x}{12y} + \frac{1}{12xy} + \frac{yz}{12} + \frac{z}{12y} + \frac{y}{12z} + \frac{1}{12yz} + \frac{xz}{12} + \frac{x}{12z} + \frac{z}{12x} + \frac{1}{12zx} \quad (5.2)$$

```
> H:=1/(1-t*P)/x/y/z;
```

$$H := 1 / \left(\left(- \left(\frac{xy}{12} + \frac{y}{12x} + \frac{x}{12y} + \frac{1}{12xy} + \frac{yz}{12} + \frac{z}{12y} + \frac{y}{12z} + \frac{1}{12yz} + \frac{xz}{12} + \frac{x}{12z} + \frac{z}{12x} + \frac{1}{12zx} \right) t + 1 \right) xyz \right) \quad (5.3)$$

Homogenize in degree -4:

```
> H:=normal(subs(x=x/u,y=y/u,z=z/u,H)/u^4);
```

$$H := - (12 u) / \left((x u^4 t + t u^4 y + u^4 z t + t u^2 x^2 y + u^2 x^2 z t + t u^2 x y^2 + t u^2 x z^2 + t u^2 y^2 z + t u^2 y z^2 + t x^2 y^2 z + t x^2 y z^2 + t x y^2 z^2 - 12 u^2 x y z) \right) \quad (5.4)$$

```

> telesc(H,[x,y,z,u],t);
"Bound on the order", 52
"Trying order:", 1
"Size Macaulay matrix in degree 6: 84 x 40"
"Rank Macaulay matrix: 40"
"Trying order:", 2
"Size Macaulay matrix in degree 11: 364 x 480"
"Rank Macaulay matrix: 337"
"Trying order:", 3
"Trying order:", 4
"Trying order:", 5
"Trying order:", 6

```

$$\begin{aligned}
& 35335[\dots 130 \text{ digits} \dots]77600 t + 22638[\dots 151 \text{ digits} \dots]26112 t^{47} \\
& + 22832[\dots 150 \text{ digits} \dots]67808 t^{41} + 17457[\dots 149 \text{ digits} \dots]91008 t^{40} \\
& - 29859[\dots 146 \text{ digits} \dots]59968 t^{27} - 10757[\dots 147 \text{ digits} \dots]00544 t^{28} \\
& - 54914[\dots 151 \text{ digits} \dots]22176 t^{49} + 35945[\dots 147 \text{ digits} \dots]87584 t^{30} \\
& + 16136[\dots 151 \text{ digits} \dots]20128 t^{46} + 10286[\dots 142 \text{ digits} \dots]76448 t^{18} \\
& + [\dots 229 \text{ terms} \dots] - 15958[\dots 146 \text{ digits} \dots]57154 t^{123} \\
& - 31541[\dots 146 \text{ digits} \dots]50696 t^{122} - 13914[\dots 146 \text{ digits} \dots]95544 t^{121} \\
& + 76753[\dots 146 \text{ digits} \dots]87112 t^{120} + 20644[\dots 147 \text{ digits} \dots]66444 t^{119} \\
& + 17498[\dots 147 \text{ digits} \dots]73488 t^{118} - 29880[\dots 147 \text{ digits} \dots]53000 t^{117} \\
& - 11191[\dots 148 \text{ digits} \dots]66952 t^{116} - 12401[\dots 148 \text{ digits} \dots]50388 t^{115} \\
& + 95507[\dots 147 \text{ digits} \dots]49576 t^{114}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

```

> collect(%,Dt,degree);
249 Dt^6 + 248 Dt^5 + 247 Dt^4 + 246 Dt^3 + 245 Dt^2 + 244 Dt + 243
\tag{5.6}

```

Singular cases

Random 1 variable examples

```

> F:=randpoly([x],degree=1)/(1-t*randpoly([x],degree=2));
F := \frac{75x + 53}{1 - t(-9x^2 - 99x + 12)}
\tag{6.1.1}

```

Homogenize in degree -2:

```

> H:=normal(subs(x=x/y,F)/y^2);
H := \frac{75x + 53y}{y(9tx^2 + 99txy - 12y^2t + y^2)}
\tag{6.1.2}

```

```

> telesc(H,[x,y],t);
Error, (in telesc) singular case should be regularized first

```

Regularization:

```

> H2:=numer(H)/(denom(H)+e*x^3+e*y^3);
H2 := \frac{75x + 53y}{y(9tx^2 + 99txy - 12y^2t + y^2) + ex^3 + ey^3}
\tag{6.1.3}

```

```

> telesc(H2,[x,y],t);
"Bound on the order", 2
"Trying order:", 1

```

"Size Macaulay matrix in degree 4: 5 x 6"
 "Rank Macaulay matrix: 5"
 "Trying order:", 2

$$\begin{aligned}
 & 277512413304116328 e^7 t^2 + 8738824496333757696 e^6 t^3 & (6.1.4) \\
 & - 277936839777268563228 e^5 t^4 - 3136944821821208865252 e^4 t^5 \\
 & + 3277654076986194812616 e^3 t^6 - 844925772266812427760 e^2 t^7 \\
 & - 8402928392924 e^8 + 19429085638800 e^5 t - 7105135623750 e^4 t^2 \\
 & - 5586691500000 e^3 t^3 + 922640625000 e^2 t^4 + 8542968750 e^4 t \\
 & + 443959935661422461250 t^{10} - 1952330411879606250 t^9 \\
 & + 1373671354005000 t^8 - 2771048725434786 t e^8 + (934769476 e^{14} \\
 & + 199246110752 e^{13} t - 2996880342440 e^{12} t^2 - 1112575734384864 e^{11} t^3 \\
 & + 125542133562753468 e^{10} t^4 + 738174788575670592 e^9 t^5 \\
 & - 371863931207240919600 e^8 t^6 + 14902562806107317287488 e^7 t^7 \\
 & + 234183347536825485364860 e^6 t^8 - 22407608058571046533073760 e^5 t^9 \\
 & + 300188566032157144448238168 e^4 t^{10} \\
 & - 119372763733511246651050848 e^3 t^{11} \\
 & + 12049305091159962893653764 e^2 t^{12} + 5264659356 e^{13} \\
 & + 1223389970368 e^{12} t + 4600444863952 e^{11} t^2 - 6679508868240384 e^{10} t^3 \\
 & + 490896038069626860 e^9 t^4 + 9711748537059474432 e^8 t^5 \\
 & - 1249508797986121934400 e^7 t^6 + 26373302676415488541824 e^6 t^7 \\
 & + 828600737425460093853108 e^5 t^8 - 24269553896958012004217280 e^4 t^9 \\
 & + 12217902196829674837167216 e^3 t^{10} - 1996597141665471263514240 e^2 t^{11} \\
 & + 103435087983103946607300 e t^{12} + 11989437765 e^{12} \\
 & + 3079721235560 e^{11} t + 69741025818174 e^{10} t^2 - 15552805762395288 e^9 t^3 \\
 & + 681845176219464423 e^8 t^4 + 24975109809353821392 e^7 t^5 \\
 & - 1372090160007882784620 e^6 t^6 + 6881748861986107271568 e^5 t^7 \\
 & + 600033671765743697134515 e^4 t^8 - 352890870152644918121400 e^3 t^9 \\
 & + 74644233752089832561838 e^2 t^{10} - 6734440861844019060600 e t^{11} \\
 & + 221979967830711230625 t^{12} + 13725870770 e^{11} + 4021370498600 e^{10} t \\
 & + 172989918628126 e^9 t^2 - 17645193466974600 e^8 t^3 \\
 & + 355422162314817108 e^7 t^4 + 23759804548043314992 e^6 t^5 \\
 & - 481762451100765427524 e^5 t^6 - 4599356690956512485232 e^4 t^7 \\
 & + 2725992797026023434106 e^3 t^8 - 566352113349202343640 e^2 t^9 \\
 & + 49597680302952272550 e t^{10} - 1561864329503685000 t^{11} \\
 & + 7617001515 e^{10} + 2782455169840 e^9 t + 191449125595204 e^8 t^2 \\
 & - 9725191658807952 e^7 t^3 + 1174930930900422 e^6 t^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 7749873753389389296 e^5 t^5 + 12692190419287744572 e^4 t^6 \\
& - 7970362578444316752 e^3 t^7 + 1524995689348554399 e^2 t^8 \\
& - 113743027977753600 e t^9 + 2747342708010000 t^{10} + 1082066856 e^9 \\
& + 849673643792 t e^8 + 101876963048076 e^7 t^2 - 2003929197005520 e^6 t^3 \\
& - 37763309176406280 e^5 t^4 - 8397614062908144 e^4 t^5 \\
& + 8622022095314100 e^3 t^6 - 1407879915930000 e^2 t^7 + 63684346500000 e t^8 \\
& - 654366149 e^8 - 15525358392 e^7 t + 21241926312966 e^6 t^2 \\
& + 61948457742600 e^5 t^3 - 7349505080625 e^4 t^4 - 2880279000000 e^3 t^5 \\
& + 369056250000 e^2 t^6 - 154113750 e^7 - 48536955000 e^6 t \\
& - 32129156250 e^5 t^2 + 6834375000 e^4 t^3 + 31640625 e^6) Dt^2 + (\\
& -155709223936 e^{13} - 12407185669120 e^{12} t + 2063950572035136 e^{11} t^2 \\
& + 58766975379636624 e^{10} t^3 - 391178838320179200 e^9 t^4 \\
& - 355896438263344278720 e^8 t^5 + 29563170976424597173632 e^7 t^6 \\
& + 892264962329190802476000 e^6 t^7 - 65178674309372100270796800 e^5 t^8 \\
& + 760954181434846640968034880 e^4 t^9 \\
& - 389025031194453836619896256 e^3 t^{10} \\
& + 48197220364639851574615056 e^2 t^{11} - 871488377984 e^{12} \\
& - 81353336075392 e^{11} t + 9388850048478936 e^{10} t^2 \\
& + 238361830766989200 e^9 t^3 + 7243788823305959520 e^8 t^4 \\
& - 1361562149621741348160 e^7 t^5 + 48335670926609041740816 e^6 t^6 \\
& + 2755115325062431544940768 e^5 t^7 - 70265552895933286646656800 e^4 t^8 \\
& + 41614451016868252515274560 e^3 t^9 - 7606924973101135371384360 e^2 t^{10} \\
& + 413740351932415786429200 e t^{11} - 1999433490880 e^{11} \\
& - 218894913379584 e^{10} t + 16969595099610312 e^9 t^2 \\
& + 323178979272287364 e^8 t^3 + 24607051615936742400 e^7 t^4 \\
& - 1618711578136005379920 e^6 t^5 + 5041292012179226529552 e^5 t^6 \\
& + 1878974609443113993790680 e^4 t^7 - 1248872445440338097560320 e^3 t^8 \\
& + 285579089560866976674480 e^2 t^9 - 26665906631064679906200 e t^{10} \\
& + 887919871322844922500 t^{11} - 2374664622400 e^{10} - 310251849646816 e^9 t \\
& + 15300574520751030 e^8 t^2 + 126780805548306144 e^7 t^3 \\
& + 25871747840261181720 e^6 t^4 - 573241346305163935488 e^5 t^5 \\
& - 13762208648869208657388 e^4 t^6 + 8954482169241666762336 e^3 t^7 \\
& - 1958219407329303342600 e^2 t^8 + 170483275961449524000 e t^9 \\
& - 5076059070886976250 t^{10} - 1484268302720 e^9 - 244873487880064 t e^8 \\
& + 7013410246197288 e^7 t^2 - 56357195930583624 e^6 t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8852371234688916360 e^5 t^4 + 39838008169019327544 e^4 t^5 \\
& - 25507490424727193928 e^3 t^6 + 4982574297475270584 e^2 t^7 \\
& - 348708810429685800 e t^8 + 6868356770025000 t^9 - 396720115456 e^8 \\
& - 102309357475776 e^7 t + 1442945895742620 e^6 t^2 \\
& - 39548192974062480 e^5 t^3 - 47306400657286680 e^4 t^4 \\
& + 32036081303401200 e^3 t^5 - 5208908185057500 e^2 t^6 \\
& + 222895212750000 e t^7 + 18907941696 e^7 - 17800799769216 e^6 t \\
& + 85429924473600 e^5 t^2 + 5684619892500 e^4 t^3 - 13749395625000 e^3 t^4 \\
& + 1660753125000 e^2 t^5 + 22370040000 e^6 - 61843500000 e^5 t \\
& + 15377343750 e^4 t^2) Dt - 2752624059368 e^{12} - 13282278903536 e^{11} \\
& - 23672299764 e^7 - 431634872950740 e^6 t - 11553272944238304 e^5 t^2 \\
& - 4202957253094272 e^4 t^3 + 11498861001613500 e^3 t^4 \\
& - 2349772237192500 e^2 t^5 + 95526519750000 e t^6 - 25021449194514 e^{10} \\
& + 529697200950 e^6 - 12932156250 e^5 - 1868037973784280 e^7 t \\
& + 44697050238209940 e^6 t^2 + 3430459037473731648 e^5 t^3 \\
& + 6726122080747309548 e^4 t^4 - 8752720465425455064 e^3 t^5 \\
& + 2034190377422881524 e^2 t^6 - 130972768484605200 e t^7 \\
& - 1712523945344328 e^9 t + 448965546711812378 e^8 t^2 \\
& + 5788340262454172448 e^7 t^3 - 729343398874385206692 e^6 t^4 \\
& + 8874718090868817332208 e^5 t^5 + 485560319057142182635428 e^4 t^6 \\
& - 488990351837601975299616 e^3 t^7 + 133060511352300916105782 e^2 t^8 \\
& - 13197024907376641785000 e t^9 + 74059356838008739950 e t^8 \\
& + 49093246356864 e^{11} t + 74209436917044008 e^{10} t^2 \\
& - 1381290392114195328 e^9 t^3 - 154241106077312870544 e^8 t^4 \\
& + 14061393371778540008832 e^7 t^5 + 133448452790022755046864 e^6 t^6 \\
& - 15670288676426786722576512 e^5 t^7 \\
& + 159634122775636090684128120 e^4 t^8 \\
& - 150279503727431343317794560 e^3 t^9 \\
& + 24098610182319925787307528 e^2 t^{10} - 309364531716168 e^{10} t \\
& + 301905788371564552 e^9 t^2 - 897118217958454656 e^8 t^3 \\
& - 598933202507157045888 e^7 t^4 + 26063029575233044801200 e^6 t^5 \\
& + 613737207440422712096688 e^5 t^6 - 17171307483343597638805824 e^4 t^7 \\
& + 16271602019729671670699184 e^3 t^8 - 3613730689770192844355880 e^2 t^9 \\
& + 206870175966207893214600 e t^{10} - 22328421086306 e^9
\end{aligned}$$

> eval(%,e=0);

$$443959935661422461250 t^{10} - 1952330411879606250 t^9 + 1373671354005000 t^8 \quad (6.1.5)$$

$$+ (221979967830711230625 t^{12} - 1561864329503685000 t^{11}$$

$$+ 2747342708010000 t^{10}) Dt^2 + (887919871322844922500 t^{11}$$

$$- 5076059070886976250 t^{10} + 6868356770025000 t^9) Dt$$

```
> collect(primpart(%,Dt),Dt,factor);
```

$$t^2 (-4 + 1137 t) Dt^2 + 2 t (2274 t - 5) Dt + 2274 t - 2 \quad (6.1.6)$$

Not necessarily minimal.

From diagonals

2d Rook paths

```
> F:=1/(1-x/(1-x)-y/(1-y));
```

$$F := \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}} \quad (6.2.1.1)$$

```
> H:=subs(y=t/x,F)/x;
```

$$H := \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{1-x} - \frac{t}{x \left(1 - \frac{t}{x}\right)}\right) x} \quad (6.2.1.2)$$

Homogenize in degree -2:

```
> H:=normal(subs(x=x/y,H)/y^2);
```

$$H := \frac{(x-y)(ty-x)}{yx(3txy-2y^2t-2x^2+xy)} \quad (6.2.1.3)$$

```
> telesc(H,[x,y],t);
```

Error, (in telesc) singular case should be regularized first

Regularize:

```
> H2:=numer(H)/(denom(H)+e*x^4+e*y^4);
```

$$H2 := \frac{(x-y)(ty-x)}{yx(3txy-2y^2t-2x^2+xy) + ex^4 + ey^4} \quad (6.2.1.4)$$

```
> telesc(H2,[x,y],t);
```

"Bound on the order", 3
 "Trying order:", 1
 "Size Macaulay matrix in degree 6: 7 x 8"
 "Rank Macaulay matrix: 7"
 "Trying order:", 2
 "Trying order:", 3

$$-88076376 e^7 t^2 + 99976368 e^6 t^3 + 14644176 e^5 t^4 - 13968672 e^4 t^5 \quad (6.2.1.5)$$

$$- 8675328 e^3 t^6 - 3234816 e^2 t^7 + 2705326080 e^{30} - 10056892416 e^{29}$$

$$+ 24496373760 e^{28} - 95820251136 e^{27} + [...399 terms...]$$

$$+ 587215836 e^6 t^5 + 416341992 e^5 t^6 + 40906512 e^4 t^7 - 72169440 e^3 t^8$$

$$- 23567616 e^2 t^9 - 4451328 e t^{10} - 103323360 e^9 - 733511604840 e^{15} t$$

$$- 624843971964 e^{14} t^2 - 241583781264 e^{14} t$$

```
> eval(%,e=0);
(1679616 t22 - 9704448 t21 + 23639040 t20 - 30242304 t19 + 18400768 t18
+ 2216960 t17 - 12927744 t16 + 9677824 t15 - 2462464 t14
- 1029120 t13 + 1084928 t12 - 402944 t11 + 76800 t10 - 7168 t9
+ 256 t8) Dt3 + (5038848 t21 - 27433728 t20 + 62767872 t19
- 72658944 t18 + 30020352 t17 + 31355136 t16 - 55078656 t15
+ 33764352 t14 - 4424448 t13 - 7347456 t12 + 5581056 t11
- 1889280 t10 + 331008 t9 - 26880 t8 + 768 t7) Dt2 + (3359232 t17
- 16298496 t16 + 32776704 t15 - 34065408 t14 + 16631808 t13
+ 1474560 t12 - 7170048 t11 + 4451328 t10 - 1350144 t9 + 201216 t8
- 10752 t7) Dt
```

```
> collect(primpart(%,Dt),Dt,factor);
t(9t-1)(t-1)(9t4-7t3+3t-1)Dt3 + (243t6-378t5+159t4
+ 162t3-195t2+60t-3)Dt2 + (162t2-156t+42)Dt
```

Not minimal!

3d rook paths (too large)

```
> F:=1/(1-x/(1-x)-y/(1-y)-z/(1-z));
F := 
$$\frac{1}{1 - \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y} - \frac{z}{1-z}}$$

```

```
> H:=subs(z=t/x/y,F)/x/y;
H := 
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y} - \frac{t}{xy \left(1 - \frac{t}{xy}\right)}\right)xy}$$

```

Homogenize in degree -3:

```
> H:=normal(subs(x=x/z,y=y/z,H)/z^3);
H := ((-z+x)(-z+y)(tz2-xy))/(zxy(4tz2xy-3txz3-3tyz3
+ 2tz4-3y2x2+2x2yz+2xy2z-xyz2))
```

```
> H2:=numer(H)/(denom(H)+e*(x^7+y^7+z^7));
H2 := ((-z+x)(-z+y)(tz2-xy))/(xyz(4tz2xy-3txz3
- 3tyz3+2tz4-3y2x2+2x2yz+2xy2z-xyz2)+e(x7+y7
+z7))
```

```
> timelimit(300,telesc(H2,[x,y,z],t)); # stops after 5 min
if not finished
"Bound on the order", 30
"Trying order:", 1
"Size Macaulay matrix in degree 11: 78 x 63"
"Rank Macaulay matrix: 63"
"Trying order:", 2
"Size Macaulay matrix in degree 18: 190 x 273"
"Rank Macaulay matrix: 190"
```

Error, (in content/gcd) time expired

Should use the algorithm by Lairez (2016) in that case.

Perimeter of the ellipse (too large)

Ellipse:

```
> F:=1/(1-(1-t^2*x^2)/(1-x^2)/y^2);
```

$$F := \frac{1}{1 - \frac{-t^2 x^2 + 1}{(-x^2 + 1) y^2}} \quad (6.2.3.1)$$

Homogenize in degree -3:

```
> H:=normal(subs(x=x/z,y=y/z,F)/z^3);
```

$$H := -\frac{(x^2 - z^2) y^2}{z^3 (t^2 x^2 z^2 - x^2 y^2 + y^2 z^2 - z^4)} \quad (6.2.3.2)$$

```
> telesc(H,[x,y,z],t);
```

Error, (in telesc) singular case should be regularized first

```
> H2:=numer(H)/(denom(H)+e*x^7+e*y^7);
```

$$H2 := -\frac{(x^2 - z^2) y^2}{z^3 (t^2 x^2 z^2 - x^2 y^2 + y^2 z^2 - z^4) + e x^7 + e y^7} \quad (6.2.3.3)$$

```
> timelimit(300,telesc(H2,[x,y,z],t)); # stops after 5 min  
if not finished
```

```
"Bound on the order", 30
```

```
"Trying order:", 1
```

```
"Size Macaulay matrix in degree 11: 78 x 63"
```

```
"Rank Macaulay matrix: 63"
```

```
"Trying order:", 2
```

```
"Size Macaulay matrix in degree 18: 190 x 273"
```

```
"Rank Macaulay matrix: 190"
```

```
"Trying order:", 3
```

Error, (in SolveTools:-LinearSolvers:-Polynomial) time expired

Should use the algorithm by Lairez (2016) in that case.