

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

Thm (Bohr - Mollerup 1922)

$\exists!$ solution méromorphe $\log$ convexe et t. q. $\Gamma(1) = 1$.

Dém $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$

Thm (Hölder) 1887

Γ est solution d'une éq. diff. alg. / $\mathbb{C}(z)$

Proposition (Bank-Kaufmann 1978)

$F \subseteq M(\mathbb{C}) = \{ \text{fcts. m\u00e9rom. sur } \mathbb{C} \}$ corps stable par $\tau: f(z) \mapsto f(z+1)$
 $\exists n \geq 0$ et

Si T est une solution d'une \u00e9q. diff alg/ F alors $\sqrt[n]{\exists g, f_0, \dots, f_n \in F \nmid g}$.

1. $f_i(z+1) = f_i(z) \quad \forall i$

2. $\sum_{i=0}^n f_i(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^i \left(\frac{1}{z} \right) = g(z+1) - g(z)$

NB $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} = \psi(z)$

D\u00e9m de l'ind' H\u00f4lder

$F \subset \mathbb{C}(z), f_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \downarrow$

Proposition

$$\mathcal{F} = F\langle \tau \rangle_{d/dx} \subseteq M(\mathbb{C})$$

$$\text{hyp. } \mathcal{F}^\tau = \{1 \text{ period} \in \mathcal{F}\} = F^\tau$$

Alors 1 et 2 $\Rightarrow \tau$ est hyperalgébrique/ F (hyp. alg = sol. éq. diff alg)

Dém.

$$\tau \left(\sum_{i=0}^n f_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^i \left(y(x) \right) - g(x) \right)$$
$$= \sum_{i=0}^n f_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^i \left(y(x) \right) + \underbrace{\sum_{i=0}^n f_i(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^i \left(\frac{1}{x} \right) - g(x+1)}_{\substack{\tau_{||F} \\ -g(x)}} \in F^\tau$$

$$\mathcal{D} \subseteq \{0, \pm 1\}^2 \setminus \{0, 0\}$$

$$g_{\mathcal{D}ijk} = \# \{ \text{manches de } (i, j) \text{ en } k \text{ pas } \in \mathcal{D} \}$$

$$\subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$$

$$Q(x, y, t) = \sum_{ijk} g_{\mathcal{D}ijk} x^i y^j t^k$$

$$K_{\mathcal{D}}(x, y, t) = x, y (1-t) \mathcal{L}(x, y)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^1 \underbrace{A_{\mathcal{D}, i}}_{\frac{1}{x} Q[x]} y^i = \sum_{i=-1}^1 \underbrace{B_{\mathcal{D}, i}}_{\frac{1}{y} Q[y]} x^i$$

$$F^1(x, t) = t x A_{-1} Q(x, 0, t)$$

$$F^2(y, t) = t y B_{-1} Q(0, y, t)$$

$$\overline{E}_t \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$K(x_0, x_1, y_0, y_1, t) =$$

$$(x_1, y_1)^2 K(x_0/x_1, y_0/y_1, t)$$

$$v_1(x, y) = \left(x, \frac{A_1(y)}{A_1(x)y} \right)$$

$$v_2(x, y) = \left(\frac{B_1(y)}{B_1(y)x}, y \right)$$

laissent $\mathcal{I}$ invariant

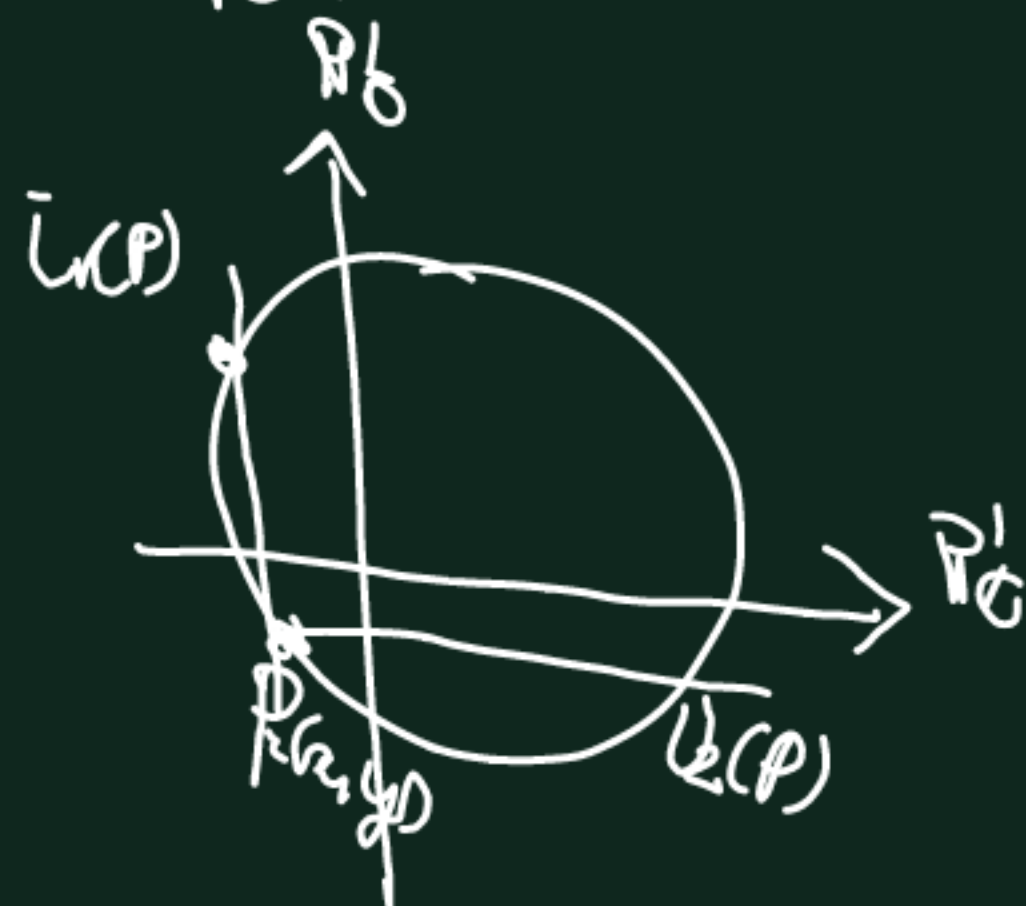
$X = \{ \text{marches avec gp infini (engendré par } i_1, i_2) \}$

Proposition

Pour toute marche dans X , $\bar{E}_t$ est une courbe elliptique

$$\bar{K}(-) = 0$$

$$\tau = i_2 \circ i_1$$



$$z_x(w) = F^1(q_1(w), t)$$

$$z_y(w) = F^2(q_2(w), t)$$

$$\tau(z_x) = z_x + b_1$$

$$\tau(z_y) = z_y + b_2$$

où b_1 et b_2 sont décrit explicitement

$$\begin{aligned} q: \mathbb{C} &\longrightarrow \bar{E}_t = \mathbb{C} / \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \\ f: \omega &\longmapsto (q_1(\omega), q_2(\omega)) \end{aligned}$$

$$\tau(f(\omega)) = f(\omega + \omega_3) \text{ pour } \omega_3 \in \mathbb{C} \text{ avec } \omega_3 \notin \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

Théorie de Galois différentielle.

(K, ∂) corps différentiel. ($\partial = \text{dérivation}$)

ex $\left(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx}\right)$

$C = \text{corps des const.} = \{x \in K, \partial(x) = 0\}.$

$\Rightarrow$ on considère

$$\partial Y = AY \quad A \in M_n(K)$$

Def K -algèbre diff (R, ∂) .

On appelle (R, ∂) un anneau de Picard-Vessiot (PV) si :

- $\exists U \in GL_n(R)$ t.q. $\partial U = AU$

- $R = K[U, \frac{1}{\det U}]$

- R est ∂ -simple (i.e. $0, R$ sont les seuls idéaux ∂ -invariants)

Rings (1.17 dans [PS])

• R $\mathcal{O}$ -simple $\Rightarrow R$ intègre ($ab=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$)

• R/k fm. engendr. et $\mathcal{O}$ simple $\Rightarrow \text{Frac}(R)^{\mathcal{O}}/C$ est une ext. finie

HYP on suppose C alg. clos $\Rightarrow \underline{\text{Frac}(R)^{\mathcal{O}} = C}$

Ex. $y' = \frac{y}{2x}$ $K = \mathbb{C}(x)$

$x^{1/2}$ $K(t)$ $t' = t/2x$ $K(x^{1/2}, t) \leadsto \text{const} = C\left(\frac{x^{1/2}}{t}\right) \neq$
 $\text{const}(K(t)) = \mathbb{C}\left(\frac{x}{t^2}\right)$

Proposition (1.20 [PS])

1. Les anneaux de PV existent

2. C alg. Cbos $\Rightarrow \exists!$ anneau de PV à isomorphisme près

3. R ann. de PV $\Rightarrow \text{Frac}(R) = \hat{R} = C$

Dém 1. $R = \frac{K[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})]}{\mathcal{M}}$ $\partial(X_{ij}) = A(X_{ij})$

2. R_1, R_2 anneaux de PV $\xrightarrow{\mathcal{M}}$ idéal $\mathcal{M}$ invariant maximal.

$R_1 \otimes_K R_2$ $\partial(r_1 \otimes r_2) = \partial(r_1) \otimes r_2 + r_1 \otimes \partial(r_2)$

$R_3 = \frac{R_1 \otimes_K R_2}{\mathcal{M}}$

$\Rightarrow$ morphisme d'anneaux $\phi: R_i \rightarrow R_1 \otimes_K R_2 \twoheadrightarrow R_3 \Rightarrow R_i \cong \phi(R_i) \rightarrow C$

(*) $\phi_1(u_1) = \phi_2(u_2) \mid M$

$M \in GL_n(C)$

$\Rightarrow \phi_1(R_1) = \phi_2(R_2)$

Def On appelle extension de PV le corps des fractions d'un anneau de PV.

Prop L/K est une ext. de PV $\Leftrightarrow \exists U \in \text{Gln}(L) + .q. \partial U = AU, L = K(U)$ et $L^q = C$

Def Groupe de Galois de $\partial Y = X Y$

$$G := \text{Gal}(R|K) = \{ \varphi: R \xrightarrow{\sim} R, \varphi|_K = \text{id}_K \text{ et } \varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi \}.$$

(NB $\neq \text{Gal}(L|K)$)

Rmq $G \longrightarrow \text{Gln}(C)$
 $\varphi \longmapsto \varphi(U) \cdot U^{-1}$
 $\quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad M_\varphi$

THM (1.27 [PS])

- G est un gp algébrique
- $L^G = K$

(n.b. $\phi: R \rightarrow R \otimes_k R$)

$$\begin{aligned} & \varphi \cdot \varphi(U) \cdot U^{-1} \\ & \varphi \varphi(U) \varphi(U)^{-1} \cdot \varphi(U) U^{-1} \\ & = \varphi(\underbrace{\varphi(U) \cdot U^{-1}}) \cdot \underbrace{\varphi(U) U^{-1}} \\ & = \varphi(M_\varphi) M_\varphi \end{aligned}$$

Idée de la preuve

$$H = (R \otimes_K R)^{\otimes 2}$$

Moralement:

$$\mathcal{M} \rightarrow \left(K \left[x_{ij}, \frac{1}{\det x_{ij}}, y_{ij}, \frac{1}{\det y_{ij}} \right] \right)^{\otimes 2} \rightarrow (R \otimes_K R)^{\otimes 2}$$

$$\mathcal{O}(x_{ij}) = A(x_{ij})$$

$$\mathcal{O}(y_{ij}) = A(y_{ij})$$

$$C \left[z_{ij}, \frac{1}{\det(z_{ij})} \right]$$

$$(z_{ij}) = (x_{ij})(y_{ij})^T$$

=

$$R = \frac{K[x_{ij}, 1/\det(x_{ij})]}{m}$$

Correspondance de Galois

$$\left((M, \sigma) \text{ t.q. } L|K \right) \xleftrightarrow{1:1} \left(H \text{ sgp alg. de } G \right)$$

$$M \longrightarrow \text{Gal}(L|K)$$

$$L^H \longleftarrow H$$

Propriétés importantes:

- ① $H \trianglelefteq G \iff M|K$ est une ext. de PV
- ② $\dim_{\mathbb{C}} G = \deg. \text{ t.z. } L|K$

$$y' = y + a \quad a \in K$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y' = y + az \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$L = K(y) \quad \forall \varphi \in G \Rightarrow \varphi(y) = y + c_{\varphi}$$

$$G \longrightarrow (C, +) = \mathbb{C}_a(C)$$

$$y \text{ trans} \iff G = \mathbb{C}_a(C)$$

$$y \text{ alg} \iff G = \{0\}$$

$$\begin{cases} y' = y + a \\ z' = z + b \end{cases} \quad K(y, z) = L$$

$$G \hookrightarrow (G_a(C))^2$$

$$\varphi \longmapsto (c_\varphi, d_\varphi)$$

$$\varphi(y) = y + c_\varphi$$

$$\varphi(z) = z + d_\varphi$$

$$y, z \text{ sont alg. ind} \iff G = (G_a(C))^2$$

$$y, z \text{ sont alg. } /_K \iff G = \{0\}$$

$$G \subseteq \left\{ \alpha c_\varphi + \beta d_\varphi = 0 \right\}_{\alpha, \beta \in C}$$

$$\varphi \in G \text{ On suppose } \varphi(\alpha y + \beta z) = \alpha y + \beta z + \alpha c_\varphi + \beta d_\varphi$$

$$\Rightarrow \alpha y + \beta z \in K \Rightarrow \alpha y' + \beta z' - (\alpha y + \beta z) = \alpha a + \beta b \in K$$

y, z sont alg. dép

$$\iff \exists \alpha, \beta \in C \text{ et } q \in K$$

$$\text{t.q. } \underset{\uparrow}{\alpha} a + \underset{\uparrow}{\beta} b = q' - q$$

$$\text{Rmq } \tau : f(n) \mapsto f(n+1) \quad n \geq 0$$

$$y' = y + a \Rightarrow \left(\tau^n(y) \right)' = \tau^n(y) + \tau^n(a)$$

$$y, \tau(y), \dots, \tau^n(y) \text{ sont alg. liés} \iff \sum \alpha_i \tau^i(a) = q' - q$$
