

Résumé des épisodes précédents

$$(K, \sigma) \quad \sigma(Y) = AY \quad A \in M_n(K)$$

$$C = K^{\sigma}$$

R et L Anneaux et extensions P.V.

$$\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}^{\sigma}(L/K) = \text{Aut}^{\sigma}(R/K) = G$$

$$G \hookrightarrow \text{GL}_n(C) \quad \text{où } U \in \text{GL}_n(L) \text{ et } \sigma U = AU \mid \Rightarrow G \text{ est un gp alg.}$$
$$\varphi \mapsto \varphi(U) \cdot U^{-1}$$

Théorie de Galois aux différences -

(K, τ) corps avec un automorphisme

$$C = K^\tau = \{f \in K, \tau(f) = f\}.$$

On suppose alg clos

$$(*) \tau(Y) = AY \quad A \in \text{GL}_n(K)$$

Définir K - τ -algèbre τ -simple R est un anneau de PV
 τ -st.

$$\exists U \in \text{GL}_n(R) \text{ tq } \\ R = K[U, \tau(U)] \\ \text{et } R^\tau = C \text{ et } \\ \tau(U) = AU$$

Proposition

R existe et il est
unique à isomorphisme près.

$$K[X, \tau] \quad X = (x_{ij}) \\ \tau(X) = AX \uparrow \\ M = \text{idéale } \tau\text{-invariant} \\ \text{max de } \\ \Rightarrow R = \frac{K[X, \tau]}{M}.$$

Pb m n'est pas premier.

Exemple

$$\tau(y) = -y \Rightarrow \tau(y^2) = y^2 \Rightarrow y^2 \in C$$

Donc y est alg./ C mais pas centré.

$$R = \frac{K[X, X^{-1}]}{(1-X^2)}$$

$$\tau(X) = -X \\ (1-X^2) \text{ } \tau\text{-idéal.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau(1-X) = (1+X) \\ \tau(1+X) = (1-X) \end{array} \right\} \text{idéaux max cont } (1-X^2)$$

$$e_0 = \frac{1-X}{2} \quad e_1 = \frac{1+X}{2} \\ e_0^2 = \frac{(1-X)^2}{4} = \frac{1-2X+X^2}{4} = \frac{1-X}{2} = e_0$$

$$e_1^2 = e_1$$

$\Rightarrow e_0, e_1$ sont idempotents

dans R

$$\tau(e_0) = e_1 \quad \tau(e_1) = e_0$$

$$\Rightarrow R \xrightarrow{\sim} e_0 R \oplus e_1 R \\ \uparrow \quad \nearrow \\ \tau^2 \text{ anneau intègre}$$

Def R τ -anneau q τ -idéal
 q est τ -premier si:

① q est premier

② $\tau^{-1}(q) = q \Rightarrow \tau: R/q \hookrightarrow$ injectif

M τ -idéal de R est dit τ -pseudo-premier
 $\exists d \geq 1$

si $\exists q$ τ^d -premier t.q. $M = q \cap \tau^{-1}(q) \cap \dots \cap \tau^{-(d-1)}(q)$

$\Rightarrow$ Anneau de PV $\Rightarrow \exists e_0 \dots e_{d-1} \in R$ idempotent, $\tau(e_i) = e_{i+1}$
 et $R = \underbrace{e_0 R \oplus \dots \oplus e_{d-1} R}_{\tau^d\text{-anneau int\`egre, } \tau^d \text{ injectif}}$

(Oschinikov - Wichner)
(IMRN, §2.2)

$$\text{Gal}(R/K) = \text{Aut}^I(R/K)$$

$$\text{Si } U \in \text{GL}_n(R), \quad \tau(U) = AU$$

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(U) \cdot U^{-1} \end{aligned}$$

Propriété $\deg_{\mathbb{C}} G = \deg_{\mathbb{C}} R/K$

Def L est un $\mathbb{Z}$ -pseudo-cors si c'est:

- $\mathbb{Z}$ -anneau noetherien
- $\mathbb{Z}$ -simple
- $\forall f \in L \neq 0 \Rightarrow \exists f^{-1} \in L$

Proposition L est un $\mathbb{Z}$ -pseudo-cors si

$\exists t \geq 1$ et $e_0, \dots, e_{t-1} \in L$ t.q.

① $e_i^2 = e_i \quad \tau(e_i) = e_{i+1}$

② $L = e_0 L \oplus \dots \oplus e_{t-1} L$

Def L est l'anneau total de PV de $\mathcal{O}(Y) = AY$
 s'il est le corps total des fractions
 d'un anneau de PV de $\mathcal{O}(Y) = AY$

Ex $R = e_0 R \oplus \dots \oplus e_{t-1} R$

$\Rightarrow L = e_0 L \oplus \dots \oplus e_{t-1} L$

corps τ^t -invariant

ce sont des corps de PV de $\tau^t(Y) = \tau^t(A) \dots \tau(A) AY$

Il suit des prop. précédentes
 que c'est un τ -pseudocorps.

$$\tau(y) = -y \quad \tau(f(x)) = f(x+1)$$

$$K = \mathbb{C}(x)$$

$$\exp(i\pi x) \quad i^2 = -1$$

$$\sigma(f(x)) = f(qx) \quad q \in \mathbb{C} \quad |q| > 1$$

$$\sigma(y) = -y$$

$$\textcircled{H}_q(x)$$

$$\textcircled{H}_q(-x)$$

$$\textcircled{H}_q(qx) = qx \quad \textcircled{H}_q(x)$$

$\mathbb{C}(x, z) \subseteq$ corps des fct. méromorphes

théorème (Poincaré)

$$- \tau(y) = Ay \quad A \in \text{GL}_n(\text{Mero}(\mathbb{C}))$$

$\Rightarrow \exists U \in \text{GL}_n(\text{Mero}(\mathbb{C}))$ solution

$$- \sigma(y) = Ay \quad A \in \text{GL}_n(\text{Mero}(\mathbb{C}^*))$$

$\Rightarrow \exists U \in \text{GL}_n(\text{Mero}(\mathbb{C}^*))$ solution

$$\textcircled{H}_q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{-n}$$

$$\mathbb{C}(x)$$

$$\tau(x) = qx + x^2$$

$P(t) \in \mathbb{P}[T]$ $\mathbb{P}$ fct 1-périodique en x

$$P(x-t) \quad T(x-f(x))$$

$$F = \text{Mer}(\mathbb{C})$$

$$C = \mathbb{C} \text{-const}$$

$$k = \mathbb{C}(x)$$

$$K = \mathbb{C}(x)$$

$$\tau(y) = Ay$$

$$A \in \text{GL}_m(\mathbb{C}(x))$$

$$\Rightarrow$$

$$G = \text{Aut}^T(K/k)$$

$$\text{gp alg}/\mathbb{C}$$

$$R_{\text{clero}} = K[U, \det U]$$

où U est une matrice de sol. de F rang m

$$\text{Frac}(R_{\text{clero}}) = L_m$$

$$G_{\text{clero}} = \text{Aut}^T(R_{\text{clero}}/K)$$

$$\Rightarrow \text{gp alg}/\mathbb{C}$$

thm (Chatzidakis Handouvi Singer)

$$R \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathbb{C}} \cong R_{\text{mero}} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathbb{C}}$$

$\bar{\mathbb{C}}$ closure alg de $\mathbb{C}$

$$G(\bar{\mathbb{C}}) = G_{\text{mero}}(\bar{\mathbb{C}})$$

$$\mathbb{C}[x, \det x] \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathbb{C}}$$

$$\mathbb{C}[x, \det x] \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathbb{C}} \Big|_{\mathbb{C}} \cong G_{\text{mero}}(\bar{\mathbb{C}})$$

serme (Prawman)

$$\forall A \in \text{Gln}(\text{Mero}(\mathbb{C}))$$

$\text{Gln}(\text{Mero}(\mathbb{C}))$ solution

$$\forall A \in \text{Gln}(\text{Mero}(\mathbb{C}^*))$$

$\text{Gln}(\text{Mero}(\mathbb{C}^*))$ solution

$$1) \frac{-n}{x}$$

$$\mathbb{C}(x)$$

$$T(x) = qx + x^2$$

$\mathbb{P}$ for 1-periodic
en x

$$T(x - p(x))$$

$$F = \text{Merid}(\mathbb{C})$$

$$\tau: f(x) \mapsto f(x+1)$$

$$K = \mathcal{P}(x)$$

$$K^\tau = F^\tau = \mathcal{P}$$

$$\boxed{\tau(y) = y + A \quad A \in \mathcal{P}(x)}$$

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}}(x) \Rightarrow G \subseteq (\overline{\mathcal{P}}, +)}$$

$$d/dx = \partial$$

$$\partial \circ \tau = \tau \circ \partial$$

$$\begin{cases} \tau(y_1) = y_1 + A \\ \tau(y_2) = y_2 + \partial(A) \end{cases}$$

$$(\overline{\mathcal{P}}(x), \tau)$$

$$\hookrightarrow G \subseteq (\overline{\mathcal{P}}^2, +)$$

$$y_1, y_2 \text{ not alg dep. } / \overline{\mathcal{P}}(x) \Leftrightarrow G \subseteq \{ \alpha X_1 + \beta X_2 = 0 \}$$

pour $\alpha, \beta \in \overline{\mathcal{P}}$ conv

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists \alpha, \beta \in \overline{\mathcal{P}} \quad +.q. \quad \boxed{\alpha A + \beta \partial(A) = \tau(y) - y} \\ &\exists g \in \overline{\mathcal{P}}(x) \end{aligned}$$

Prop

y est solution ^(*) d'une
eq diff algè d'ordre 1

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \bar{\mathbb{P}} \quad \text{t.q.} \quad \alpha A + \beta D(A) = \tau(g) - g -$$

$$\exists g \in \bar{\mathbb{P}}(\alpha) \quad (**)$$

Prop Supposons que $A \in \mathbb{C}(\alpha) \subseteq \mathbb{P}(\alpha)$
sont eq.

① (*)

② (**)

③ $\exists \alpha, \beta \in \bar{\mathbb{P}}, g \in \mathbb{C}(\alpha) \quad \alpha A + \beta D(A) = \tau(g) - g$

④ y est solut d'un eq alge d'ordre 1 / $\mathbb{C}(\alpha)$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3} \text{ descente}$$