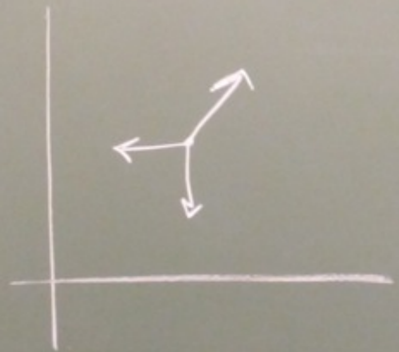
TD : la marche de Kreweras



$$Q(x,y;t) = \sum \#\{(0,0) \xrightarrow{n} (i,j)\}\, x^i y^j t^n$$

$$Q(x,0;t) = \frac{1}{tx}\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{W} - \frac{1}{x}\right)\sqrt{1-xW^2}\right)$$

avec $W = t(2+W^3)$

$$W = 2t + 8t^4 + 96t^7 + \dots$$

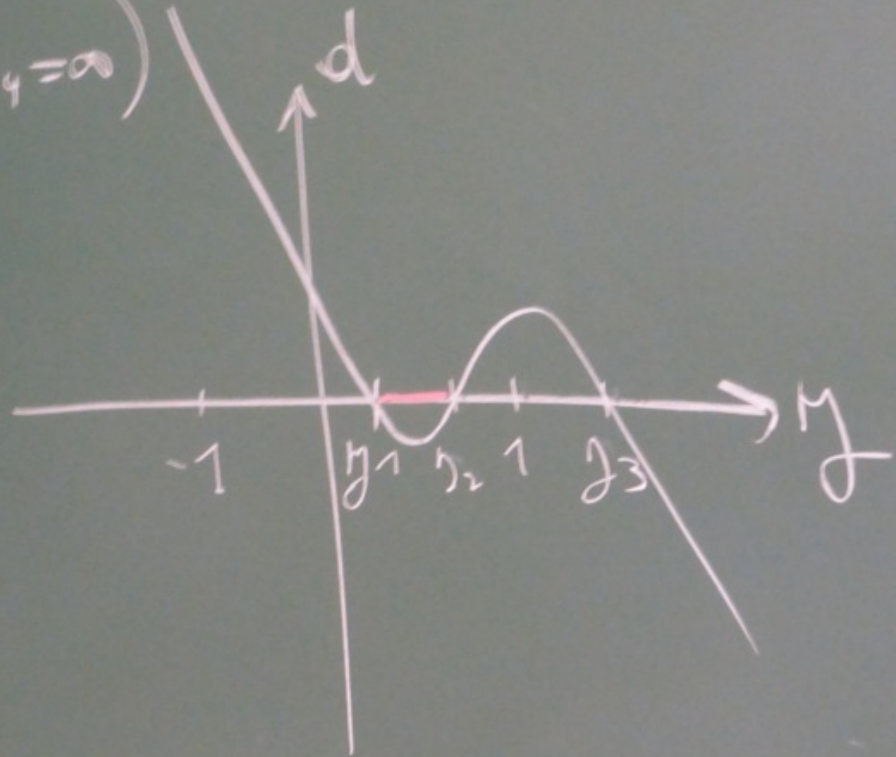
$$\boxed{Q(0,0;t) = \frac{1}{2}\left(W - \frac{W^4}{4}\right)}$$

$$X_0, X_1 = \frac{y - t \pm \sqrt{d(y,t)}}{2y^2 t} \quad \text{avec } d(y,t) = -4t^2y^3 + y^2 - 2ty + t^2$$

$$= -4t^2(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$$

$$0 < y_1 < y_2 < 1 < y_3 \; (< y_4 = \infty)$$

$$\begin{cases} y_1 = t - 2t^{5/2} + 6t^4 - \dots \\ y_2 = t + 2t^{5/2} + 6t^4 + \dots \\ y_3 = \dfrac{1}{4t^2} - 2t - 12t^4 + \dots \end{cases}$$



$$\frac{1}{2}\left(W-\frac{W^4}{4}\right)$$

$$xy\left(\underbrace{-1+t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\right)}\right)Q(x,y;t)=$$

$$\underbrace{txQ(x,0,t)}_{R(x)}+\underbrace{tyQ(0,y,t)}_{R(y)}-xy$$

Branches X_0 et X_1 : $-1+t\left(\frac{1}{X_i}+\frac{1}{y}+X_iy\right)=0$

$$\| \; R(X_0)-R(X_1)=(X_0-X_1)y$$

Eq. fonct X_0 : $0=R(X_0)+\cancel{R(y)}-X_0y$

X_1

preuve de $\Phi(\ldots)$

$$-\frac{1}{X_0} - \left(-\frac{1}{X_1}\right) = (X_0 - X_1)y$$ (trivial avec noyau)

$I_1(x) = R(x) + \frac{1}{x} \Longrightarrow I_1$ inv au sens où $I_1(X_0) = I_1(X_1)$

$I_2(x) = \frac{t}{x^2} - \frac{1}{x} - tx$ est aussi un invariant (calcul)

Thm invariants "un inv sans pôle est constant"

$$tI_1^2 - I_2 - I_1 = \boxed{tR^2 + R\left(\frac{2t}{x} - 1\right) + tx = 2t^2\Phi(0,0)}$$

Bousquet-Mélou / Jehanne

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{B_{-1}(y)}{B_1(y)}\frac{1}{x}, y\right)$$

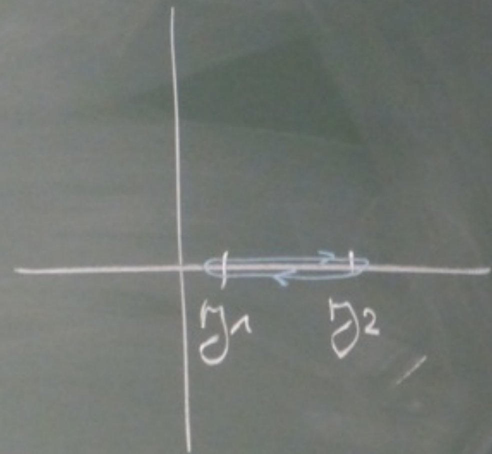
$$\Phi^2 = id$$

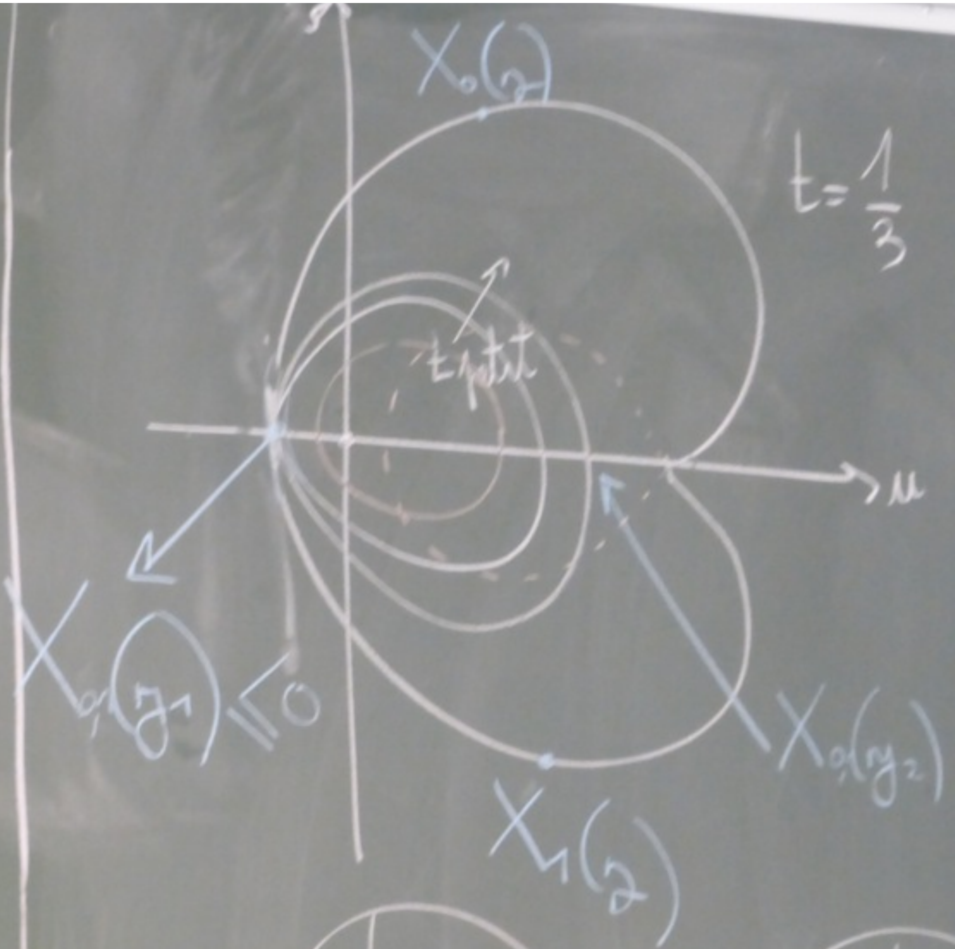
Choix : $\mathcal{S} = [y_1(t), y_2(t)]$

Pour $y \in \mathcal{S}$, $X_0(y) = \overline{X_1(y)}$

$\alpha = \bar{\cdot}$, conjugaison complexe

À quoi ressemble $\mathcal{C}$? Image d'un segment extrémités algébriques par fonction algébrique



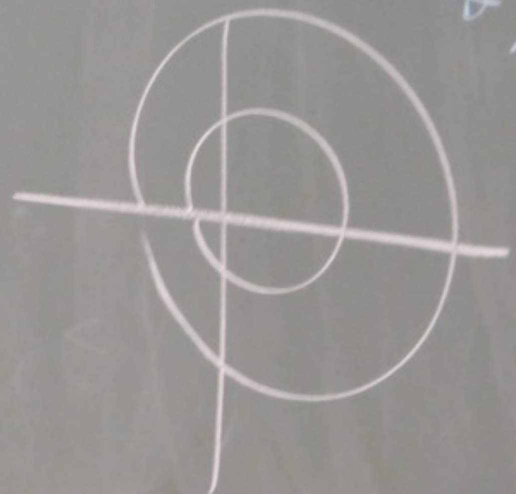


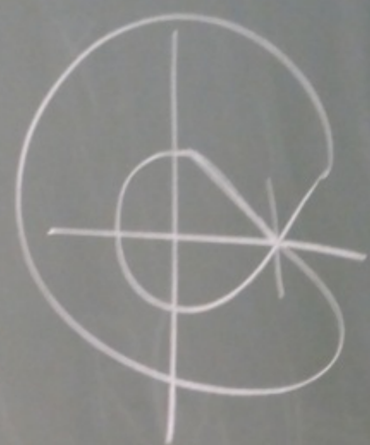
$t = \frac{1}{3}$

pas cohérent avec point gauche

quartique :

$$\left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : \left(u^2+v^2\right)^2 + 2u - \frac{1}{t}\left(u^2+v^2\right) = 0 \right\}$$





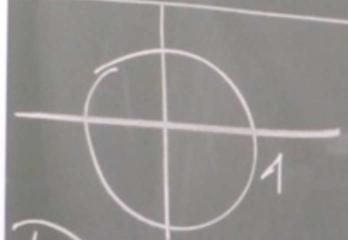
ntés'

Quelques propriétés de la "fonction de collage conforme"

On cherche $w : D_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$

domaine borné courbe

1. w méromorphe dans $D'_{\mathcal{C}}$ (domaine contenant $\overline{D_{\mathcal{C}}}$)
2. w injective dans $D_{\mathcal{C}}$
3. $w(x) = w(\bar{x})$ sur $\mathcal{C}$



$D(0,1)$

$$w(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$w(e^{i\theta}) = w(e^{-i\theta}) = \cos\theta$$

Remarque :

w est conforme de $D_{\mathcal{C}}$ vers $\mathbb{C} \setminus w(\mathcal{C})$.

Remarque : exactement un pôle

$$ad - bc \neq 0$$

Remarque : w convient $\Rightarrow \dfrac{aw+b}{cw+d}$ convient

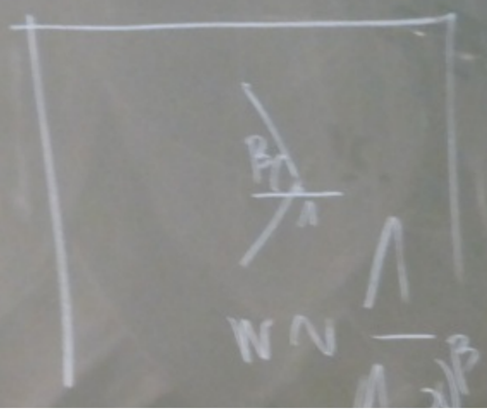
(ajuster l'ensemble $w(\mathcal{C}) = [-1,1]$
pôle)

Lien avec thm application conforme Riemann

$$f : D_{\mathcal{C}} \longrightarrow D(0,1)$$

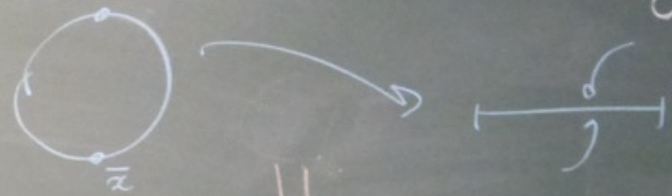
$$v : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1,1]$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$w = v \circ f$$



Quelques propriétés de la "fonction de collage conforme"

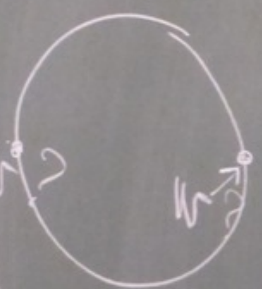
Et pour Kreweras ?



$$w(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{W}\right)\sqrt{1-xW^2} = -\frac{(1-xW^2)}{x^2} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{W}\right)\frac{(W^2)}{2}$$

$$-\frac{1}{W^2} + W$$

est UNE fonction de collage conforme



$w'(x) = 0$

$\Longrightarrow x = W$?

$$\underbrace{tx\,Q(x,0)}_{R(x)} = -\frac{1}{x} + w(x) + \frac{1}{2t}$$

Rem

Rem

Gluing ? $\longrightarrow$ Uniformisation

$$\mathcal{X}_t = \left\{ (x,y) \in \mathbb{P}_1^2 : 1 - t\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy\right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \qquad : \left(2t\, x^2 y + t - x\right)^2 = d(x) \right\}$$

$$\left\{ (u,v) \in \mathbb{P}_1^2 : v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3 \right\} = \left\{ (\wp(\omega), \wp'(\omega)) ; \omega \in \mathbb{C} / \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} \right\}$$

$$\omega_1, \omega_2 = \int \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

Et par Kurokawa:

$$x(\omega) = \frac{\wp(\omega) - 1/3}{-4t^2}$$

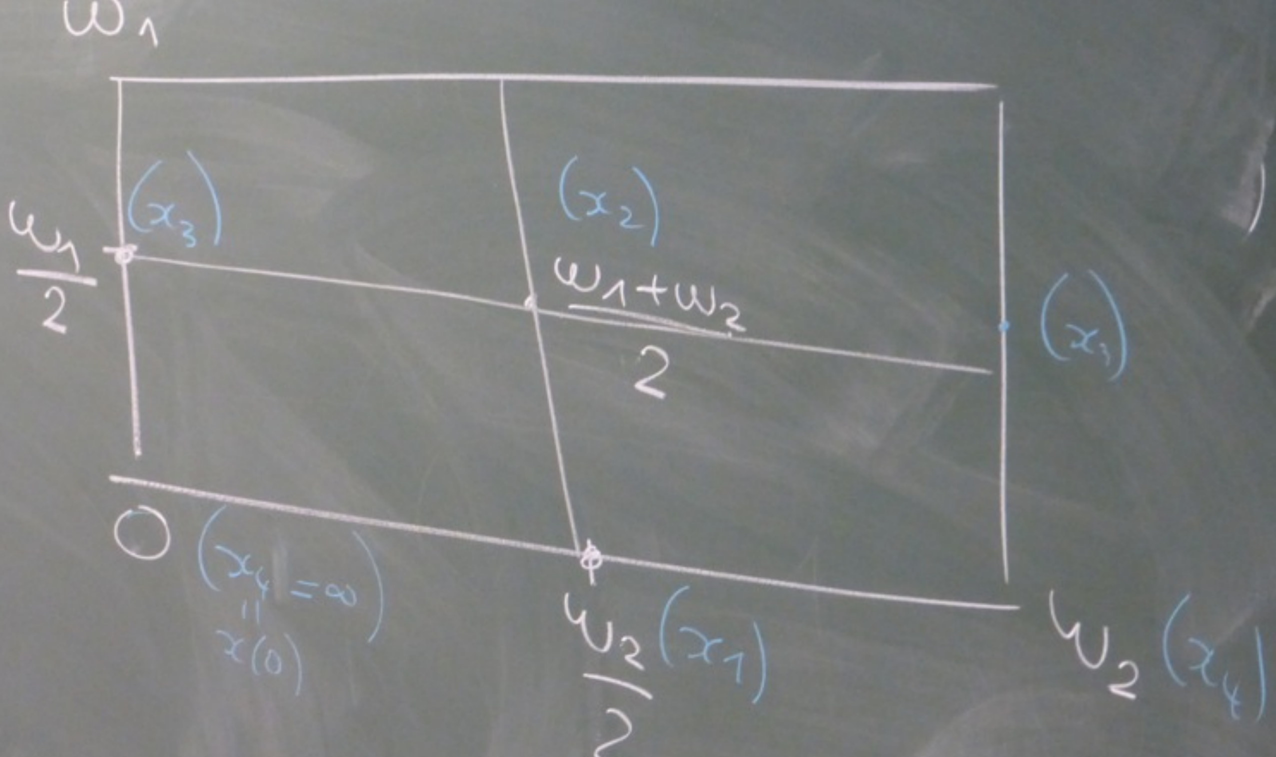
$$y(\omega) = \frac{t\wp' - 2t\wp + \frac{2}{3}t - 8t^4}{(\wp - 1/3)^2}$$

$$g_2 = \frac{4}{3} - 32t$$

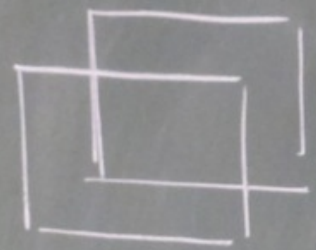
$$g_3 = -\frac{8}{27} + \frac{32t^3}{3} - 64t^6$$

$$\omega_1 = \int_{(g_3)\, y_1}^{(g_2)\, y_2} \frac{dy}{\sqrt{d(y,t)}} \in i\mathbb{R}_+ \qquad \omega_2 = \int_{y_2}^{y_3} \frac{dy}{\sqrt{d(y,t)}} \in \mathbb{R}_+$$

$$\wp(\omega) = \frac{1}{\omega^2} + \dots$$

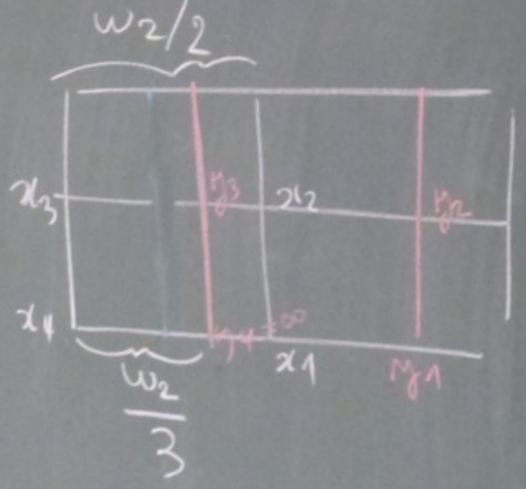


$\mathbb{R}_+$



Comment se comparent / s'imbriquent les 2 ?

Montrons que :



(x_3)

preuve n°1 : groupe

preuve n°2 : $y(w) = \dfrac{tS' - 2tS + \frac{2}{3}t - 8t^4}{(S - 1/3)^2}$

$w = 0$ candidat mais DL montre que non

$S\left(\frac{w_2}{3}\right) = S\left(\frac{2w_2}{3}\right) = \frac{1}{3}$ $\quad w = \frac{w_2}{3}, \frac{2w_2}{3}$ candidats

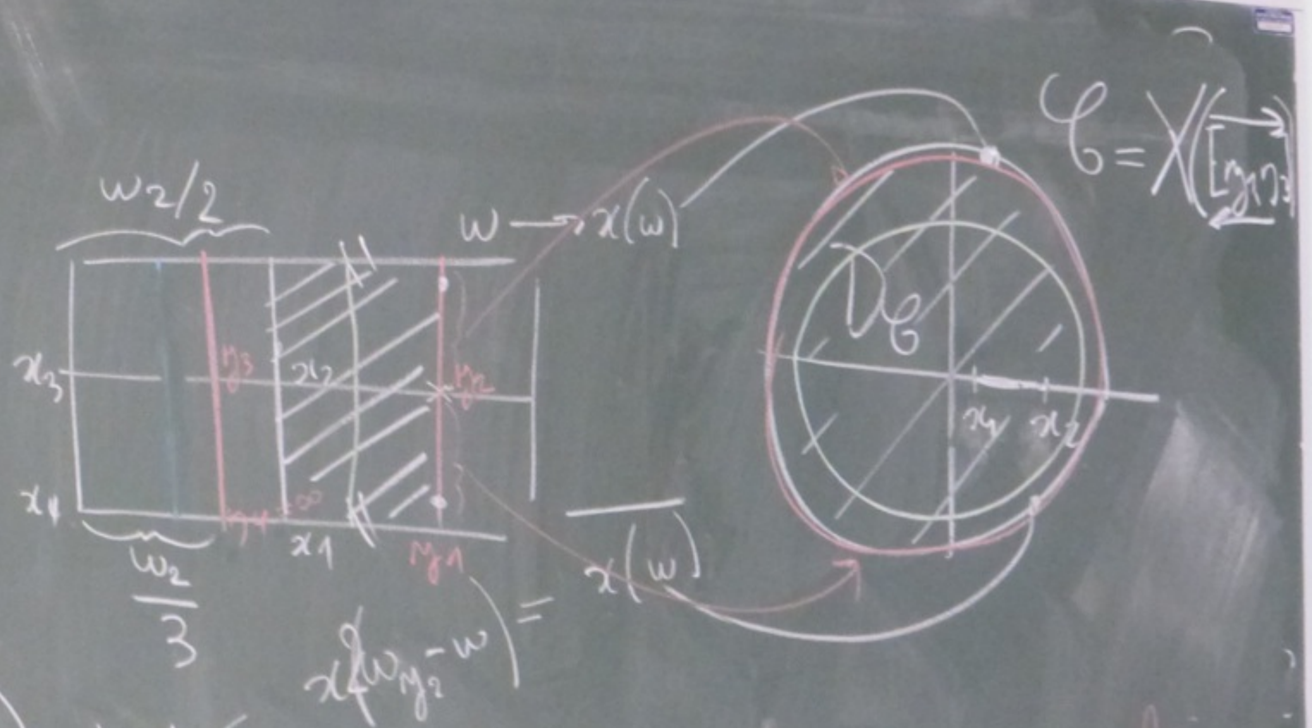
$w_2 (x_4)$

$S\left(\frac{w}{3}\right)$

tion

$$\underset{\omega_1,\,\omega_3}{\mathcal{S}} \circ \underset{\omega_1,\,\omega_2}{\mathcal{S}^{-1}}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} \in \mathbb{Q}$$



$$(3) \longrightarrow V(\omega) = V(2\omega_{y_2} - \omega)$$ ← parité de S par rapport au milieu parallélogramme

$$(1) \longrightarrow V(\omega) = V(2\omega_{x_2} - \omega)$$ ← parité de S

$$\overline{\mathcal{S}}(\omega) = \mathcal{S}(\bar{\omega})$$

Choix : $$V(\omega) = \mathcal{S}\left(-\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \omega \,;\, \omega_1, \underbrace{\frac{2}{3}\omega_2}_{\omega_3}\right)$$

(formule addition Weierstrass)
et on trouve w(z)
V méromorphe (?)
Choix: V(w) =
d(y,t) = -4t²y³ + y² - 2t
= -4t²(y - y₁)(y -