

Mise en œuvre.

Notations.
 $S = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} x_{ij}$, polynôme de Laurent de la marche. $t \in]0, \frac{1}{10}[$ réel général.

 $K = xy(1-tS) \in \mathbb{C}[x,y]$ le noyau.

 $\begin{cases} i_1, i_2 : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \tau = i_1 \circ i_2 \end{cases}$ les deux involutions habituelles.

 $E = \text{clôture de } \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid K(x,y)=0\} \text{ dans } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$
 $\simeq \mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}.$
 $w \in \mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{pt. } (q_1(w), q_2(w)) \in E$
 paramétrisation holomorphe.

 $\mathbb{C}(E) \begin{cases} \nearrow \text{fonctions rationnelles sur } E \text{ (fractions rat. en } x \text{ et } y) \\ \searrow \text{fonction méromorphe } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ périodiques.} \\ \quad \text{(sous corps de } d\mathbb{C}(E) \text{)} \end{cases}$
 $\tau(w) = w + \omega_3$
Hypothèse: ω_3 d'ordre infini.Rappels I.
 $xy K(x,y) Q(x,y) = xy - F^1(x) - F^2(y) + \text{cte.}$

 Question: est-ce que F^1 et F^2 sont hyperalg. ou non?
 (ils le sont simultanément).

 $r_x \nVdash F_2(q_1(w))$
 $r_x \text{ h.alg.} \Leftrightarrow F_2 \text{ h.alg.}$
 $r_y \nVdash F_2(q_2(w)).$

[KR 12] r_x et r_y sont méromorphes sur $\mathbb{C}$.

~~r_x et r_y~~ , $r_{x\circ\tau}$

$$(2.4) \quad \tau(r_x) - r_x = b_1 \quad (= \sigma_2 \circ i_1 \cdot (q_1 \circ \tau - q_1)) \in \mathbb{C}(E)$$

$$(2.5) \quad \tau(r_y) - r_y = b_2 \quad (= \dots) \in \mathbb{C}(E)$$

$$(2.6) \quad r_x(\omega + \omega_1) = r_x$$

$$(2.7) \quad r_y(\omega + \omega_1) = r_y.$$

Rappels I. Critère d'hypertranscendance.

Sur $\mathcal{M}(\mathbb{C})$: $\delta = \frac{d}{d\omega}$, τ : shift par ω_1 .
 $\delta \circ \tau = \tau \circ \delta$.

Thm Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est h.alg. et si $\tau f - f = b \in \mathbb{C}(E)$,
 alors $\exists L \in \mathbb{C}[\delta] \setminus \{0\}$: $L(b) = \tau(g) - g$,
 $\exists g \in \mathbb{C}(E)$

Si de plus $f(\omega + \omega_1) = f(\omega)$ alors la réciproque est vraie.

Dém.

Thm. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tq $\tau f - f = b \in \mathbb{C}(E)$.

Si f est h.alg. alors

$$(*) \quad \exists L \in \mathbb{C}[\delta] \setminus \{0\}, \exists g \in \mathbb{C}(E): L(b) = \tau g - g.$$

De plus, si $f(\omega + \omega_1) = f(\omega)$, alors $(*) \Rightarrow f$ h.alg.

Dém. $\Rightarrow$ cf. exposé du LdV.

$$\Leftarrow. \text{ Soit } H = L(f) - g.$$

$$\tau H - H = L(\tau f - f) - (\tau g - g) = 0.$$

$$\text{Donc } H(\omega + \omega_1) = H(\omega)$$

Comme $H(w+w_1) = H(w)$, on a $H \in \mathcal{O}(p_{13}, y'_{13})$
 c'est-à-dire $y'_{13}(w) = y'_4(w; w_1, w_3)$. (h.a.g.)

Donc H est h.a.g. et par suite f .

On donne $b \in \mathcal{O}(E)$.

$$\text{c. } \exists L \in \mathcal{O}(S) \setminus \{0\}, \text{ t.q. } L(b) = \tau g - g \quad ?$$

$$\exists g \in \mathcal{O}(E)$$

Étudions d'abord $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^1)$. $\tau(x) = x+1$.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, soit $\text{pol}_\alpha(f) = \text{classe de } f \text{ dans } \mathcal{O}((z-\alpha)) / \mathcal{O}((z-\alpha)^2)$

$$\text{opol}_\alpha(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{pol}_\alpha(\tau^n f). \quad (\text{somme à support fini})$$

Prop. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1)$.

$$\exists g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1), f = \tau(g) - g \iff \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ opol}_\alpha(f) = 0.$$

Dém. $\Rightarrow$ $\text{opol}_\alpha(\tau g) = \text{opol}_\alpha(g)$.

$$\Leftarrow \text{On écrit } f = f_{\infty} + \sum_{\alpha \in \mathbb{A}^1} f_\alpha \in \mathbb{C}[x, \frac{1}{x-\alpha}].$$

Sans changer la classe de f modulo $\Delta(\mathcal{O}(\mathbb{A}^1))$, on peut supposer

$$\text{que } [\alpha - \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_\alpha = 0 \text{ ou } f_\beta = 0.]$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{A}^1, \alpha - \beta \in \mathbb{Z}.$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}^1, \text{opol}_\alpha(f) \equiv f_\alpha \rightarrow f_\alpha = 0.$$

$$\Rightarrow f = f_{\infty}.$$

Cas général. E elliptique, $\tau(\omega) = \omega + \omega_3$.

Thm. $\exists L \in \mathbb{C}(S) \setminus \{0\} \exists g \in \mathbb{C}(E) \quad L(f) = \tau g - g$
 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in E, \quad \text{opol}_\alpha f = 0$.

Dém. " $\Rightarrow$ " $Lf = \tau g - g \Rightarrow \text{opol}_\alpha L(f) = 0$
 $\Rightarrow L(\text{opol}_\alpha f) = 0$
 $\Rightarrow \text{opol}_\alpha f = 0$.

" $\Leftarrow$ ". Soit $A \subset E$ les pôles de f .

Par Abel (ou Riemann-Roch), il existe pour tout $\alpha \in A$ et $k \geq 2$ une fonction méromorphe sur E avec un unique pôle en α et d'ordre k .
(monopôle)

Donc on peut écrire

$$f = \underbrace{h}_{\text{pôles simples}} + \sum_{\alpha \in A'} \underbrace{g_\alpha}_{\text{monopôle}} \quad \text{avec } A' \subset A.$$

Par le même argument que dans le cas rationnel, on a $\forall \alpha, \beta \in A', \quad \alpha - \beta \in \omega_3 \mathbb{Z}$.

Mais alors $\text{opol}_\alpha f = 0 \Rightarrow g_\alpha = 0$.

Donc $f \equiv h \in \left\{ \text{fcts méromorphes sur } E \text{ avec pôles simples en } A \right\}$.

espace vectoriel de dim fini

comme f, L

idem pour $Sf, S^2f, \dots$