

Méthode des invariants de Tutte et mouvement brownien réfléchi dans les cônes

Étude de la distribution stationnaire

SANDRO FRANCESCHI

En collaboration avec

M. BOUSQUET-MÉLOU, A. ELVEY PRICE, C. HARDOUIN, K. RASCHEL

Strasbourg, 4 juin 2021

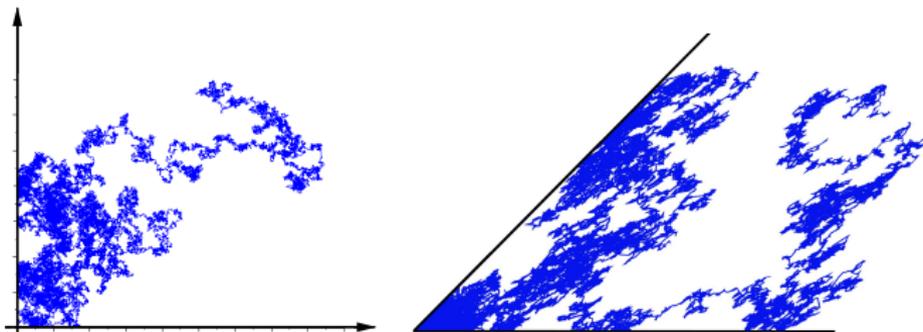
ANR *De rerum natura*



université
PARIS-SACLAY

Introduction

Du quart de plan aux cônes

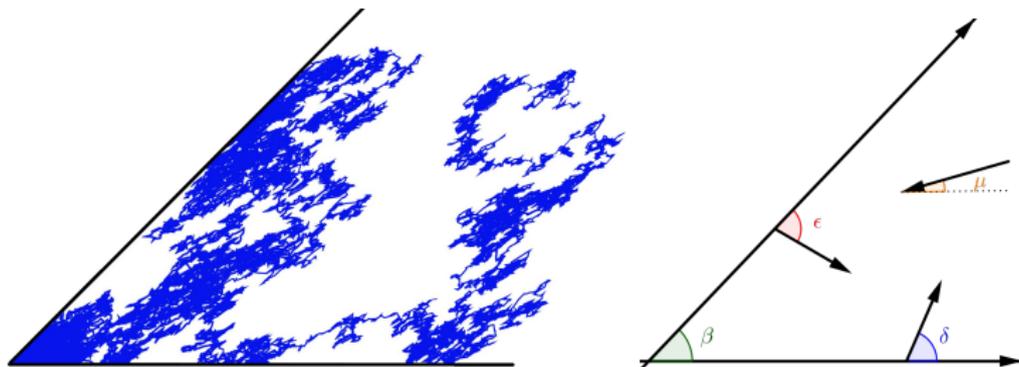


transformation linéaire

quadrant \longleftrightarrow **cone**

covariance Σ \longleftrightarrow angle β

cadre continu \neq cadre discret



- ▶ **Réflexions obliques** d'angle constant le long de chaque bord
- ▶ **Dérive** (drift)

Selon les paramètres du modèle le processus Z_t est :

▶ **Transient** $Z_t \rightarrow \infty$ (mesures de Green)

↔ **Quantité de temps** que le processus passe dans un ensemble A

$$g(A) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \mathbb{1}_A(Z_u) du \right]$$

▶ **Récurrent** (distribution stationnaire/mesure invariante)

↔ **Proportion de temps** que le processus passe dans un ensemble A

$$\pi(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_A(Z_u) du \right]$$

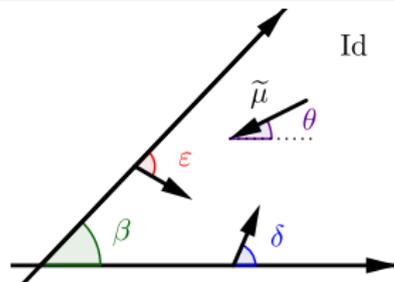
‡ Objectif

▶ Étudier la transformée de Laplace (fonction génératrice) de la **distribution stationnaire**

- **Expression exacte** (intégrales de contour, fonctions hypergéométriques, invariants conformes)
- **Nature algébrique** (rationnelle, algébrique, D-F, D-A)

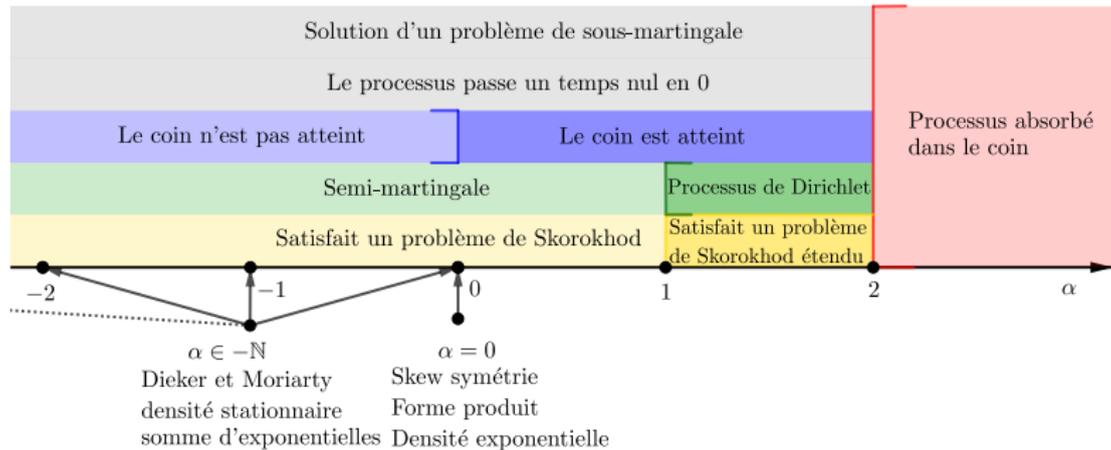
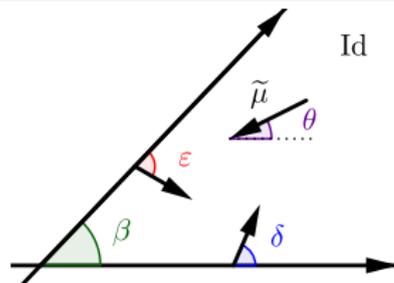
Un paramètre clé α

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



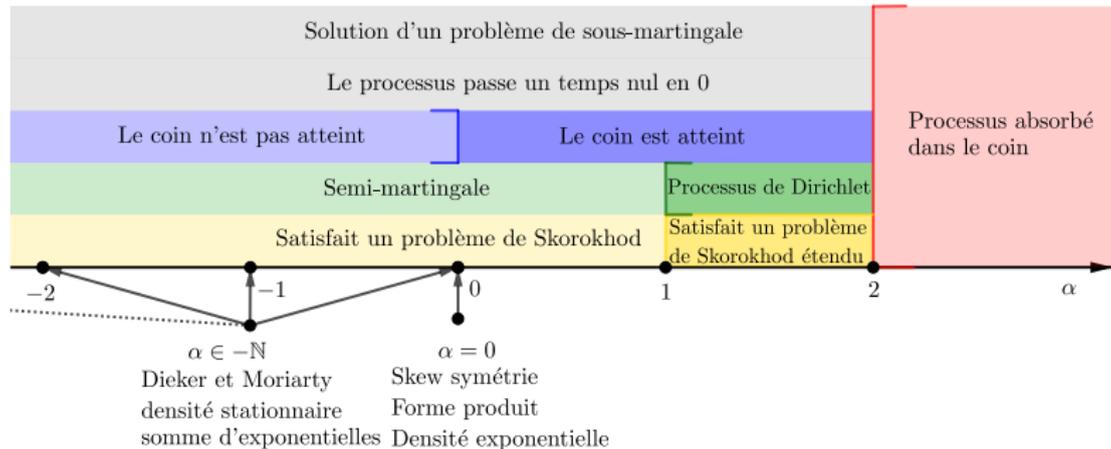
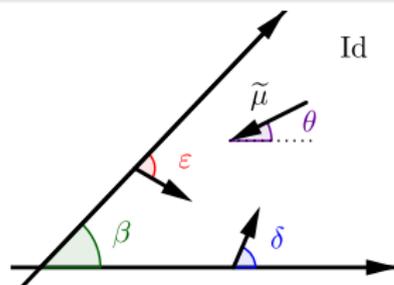
Un paramètre clé α

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Un paramètre clé α

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Deux autres paramètres

$$\alpha_1 = \frac{2\epsilon + \theta - \beta - \pi}{\beta}, \quad \alpha_2 = \frac{2\delta - \theta - \pi}{\beta}$$

Nature algébrique (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Nature algébrique de la transformée de Laplace de la distribution stationnaire

| | D-algébrique | D-finie | Algébrique | Rationnelle |
|-------------------------------|---|--|---|----------------------------|
| $\beta/\pi \notin \mathbb{Q}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0 + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} \cup \left(-\mathbb{N} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}\right)$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |
| $\beta/\pi \in \mathbb{Q}$ | toujours | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |

- ▶ **Calcul récursif des moments** de la distribution stationnaire
- ▶ **Formule explicite sans intégrale** (fonctions hypergéométriques)

- **Question probabiliste** : distribution stationnaire
 - ▶ **Équations fonctionnelles à noyau** (fonctions génératrices, transformées Laplace)
- **Méthodes et outils**
 - ▶ **Analytique**
Problèmes frontières (Carleman ou Riemann-Hilbert, Sokhotski-Plemelj)
↪ FAYOLLE, MALYSHEV, **Marches dans le quadrant**, années 70-80
 - ▶ **Combinatoire**
Invariants de Tutte (Fonctions de découplage)
↪ TUTTE, **Triangulations colorées**, années 70-80
↪ BERNARDI, BOUSQUET-MÉLOU, RASCHEL, **Marches**, années 2010
 - ▶ **Algébrique**
Théorie de Galois différentielle (Équation aux q -différences)
↪ DREYFUS, HARDOUIN, ROQUES, SINGER, **Marches**, années 2010

Objectif

Développer pour le **Brownien** (continu) ces 3 méthodes habituellement utilisées pour les **marches dans le quadrant** (discret)

- 1 Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
- 2 Approche analytique et problème frontière
- 3 Méthode des invariants de Tutte
- 4 Exemples

- 1 **Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant**
- 2 Approche analytique et problème frontière
- 3 Méthode des invariants de Tutte
- 4 Exemples

- ▶ B_t mouvement brownien
- ▶ On définit le **temps local**

$$L_t^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[a, a+\epsilon]}(B_s) ds$$

↔ densité de temps passé en a avant t

Formule du temps d'occupation

$$\int_0^t f(B_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a da$$

- ▶ $|B_t|$: **Brownien réfléchi** en dimension 1 = valeur absolue de B_t
- ▶ **Formule d'Itô**

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

↪ Appliquée à $f = |\cdot|$, $f' = \text{sgn}$ et $f'' = 2\delta_0$

$$\Rightarrow |B_t| = 0 + \underbrace{\int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s}_{\substack{\text{mouvement brownien} \\ W_t}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^t 2\delta_0(B_s) ds}_{\substack{\int_{\mathbb{R}} \delta_0(a) L_t^a da = L_t^0 \\ \text{formule d'occupation}}}$$

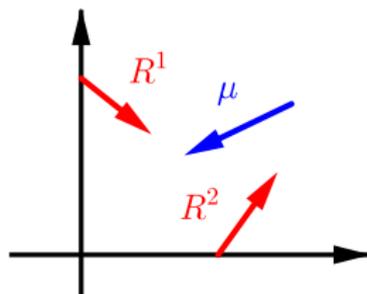
Formule de Tanaka

$$|B_t| = W_t + L_t^0$$

- W_t mouvement brownien
- L_t^0 temps local à l'origine

Paramètres du modèle

- ▶ W_t Brownien plan, covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$
- ▶ $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ dérive
- ▶ $R = (R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de réflexion



Définition (Semimartingale Reflected Brownian Motion)

On définit un SRBM qui a pour point de départ z_0 par

$$Z_t = z_0 + W_t + \mu t + RL_t \in \mathbb{R}_+^2$$

où L_t^i est un processus continu et croissant, qui s'accroît uniquement lorsque le processus touche un axe.

$\hookrightarrow L_t$ est le **temps local** sur les axes \hookrightarrow Problème de **Skorokhod**

Théorème (Reiman, Taylor, Williams, 1988 et 1993)

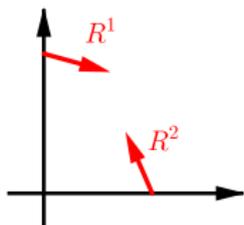
Un tel processus Z_t **existe** pour tout $t \geq 0$ sans absorption

$\Leftrightarrow r_1, r_2 > 0$ ou $1 - r_1 r_2 > 0$

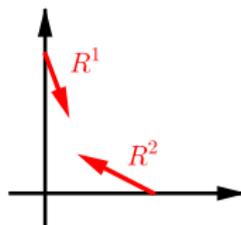
$\Leftrightarrow \exists$ **combinaison convexe** de R^1 et R^2 qui appartient à \mathbb{R}_+^2 .

Absorption à l'origine

Sinon, Z_t peut atteindre l'origine et y rester coincé : **absorption**



► Existence $\forall t$



► Pas d'existence $\forall t$

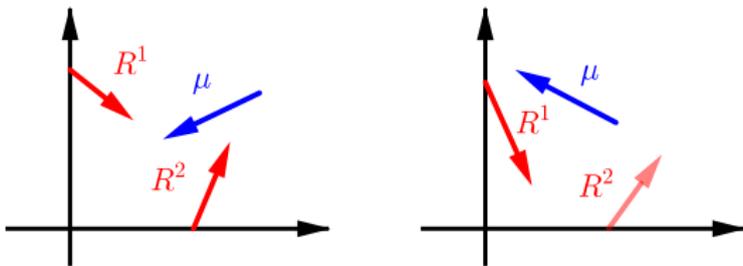
Absorption à l'origine

Proposition (D. Hobson et L. Rogers, 1993)

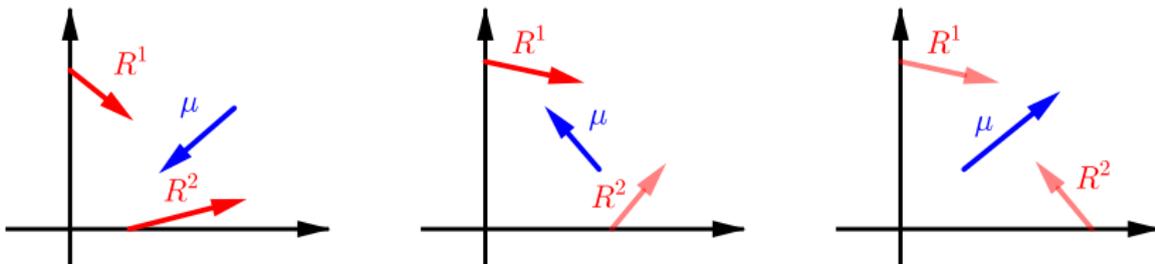
- Récurrent $\Leftrightarrow 1 - r_1 r_2 > 0$, $\mu_1 - r_2 \mu_2 \leq 0$, $\mu_2 - r_1 \mu_1 \leq 0$
- Transient sinon

► **Compétition entre dérive (drift) et vecteurs rebond**

Cas récurrent



Cas transient



Soit π la **distribution stationnaire** (ou **mesure invariante**) sur \mathbb{R}_+^2 .

- Théorèmes ergodiques :

↪ proportion moyenne de temps passé en $A \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\pi(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_A(B_u) du \right]$$

- Qu'en est-il sur les **frontières** ?

Soit π la **distribution stationnaire** (ou **mesure invariante**) sur \mathbb{R}_+^2 .

- Théorèmes ergodiques :

↪ proportion moyenne de temps passé en $A \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\pi(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_A(B_u) du \right]$$

- Qu'en est-il sur les **frontières** ?

↪ proportion moyenne de **temps local**

On définit ν_1 une mesure sur le bord, pour $A \in \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\nu_1(A) = \mathbb{E}_\pi \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_A(B_u) dL_u^1 \right].$$

De même on définit ν_2 .

► *Distributions stationnaires sur les frontières*

▶ **Cas discret** : la fonction génératrice de la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ sur \mathbb{Z}_+^2 est la **série génératrice** $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} \pi_{i,j} x^i y^j$.

▶ **Cas continu** :

- La fonction génératrice de la **distribution stationnaire** est la **transformée de Laplace**

$$L(x, y) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{xu+yv} \pi(u, v) du dv$$

- Sur les *frontières* on définit

$$L_2(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xu} \nu_2(u) du, \quad L_1(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{yv} \nu_1(v) dv$$

Équation fonctionnelle

Cette équation qui relie les transformées de Laplace **caractérise** la distribution stationnaire.

Équation fonctionnelle

$$-K(x, y)L(x, y) = K_1(x, y)L_1(y) + K_2(x, y)L_2(x)$$

où

$$\begin{cases} K(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + \sigma_{22}y^2 + 2\sigma_{12}xy) + \mu_1x + \mu_2y, \\ K_1(x, y) = x + r_1y, \\ K_2(x, y) = r_2x + y. \end{cases}$$

- ▶ Connecte ce qui se passe **dans le quart de plan** et **sur ses frontières**.
- ▶ La fonction K est appelée le **noyau**.

Preuve : Formule d'Itô.

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G}f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où \mathcal{G} est le générateur. \triangleleft domaine du générateur !

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G}f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où \mathcal{G} est le générateur. \triangle domaine du générateur !

La relation analogue pour le mouvement brownien réfléchi dans le quadrant est la “**basic adjoint relationship**” :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^2) \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G}f(z) \pi(dz) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i f(z) \nu_i(dz) = 0$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur “dans” le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs “sur les frontières” sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur “dans” le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs “sur les frontières” sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

\Leftrightarrow On doit juste prendre $f = e^{\langle (x,y) | \cdot \rangle}$ dans la *basic adjoint relationship* pour obtenir l'équation fonctionnelle. En effet

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G}e^{\langle (x,y) | z \rangle} \pi(dz) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i e^{\langle (x,y) | z \rangle} \nu_i(dz) = 0$$

donne

$$K(x, y)L(x, y) = L_1(x, y)L_1(y) + K_2(x, y)L_2(x).$$

- 1 Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
- 2 Approche analytique et problème frontière**
- 3 Méthode des invariants de Tutte
- 4 Exemples

Méthode analytique

- Trouver une **équation fonctionnelle**
- Étudier le **noyau** (surface de Riemann, groupe)
- **Prolonger** analytiquement les fonctions génératrices
- Établir un **problème frontière**
- Le **résoudre** (formules de Sokhotski–Plemelj, invariants conformes)

Résultat

Formule explicite intégrale de la fonction génératrice

Noyau et surface de Riemann

► Le **noyau** K peut s'écrire $K(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

↔ Deux branches : $Y^\pm(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{b^2(x) - 4a(x)c(x)}}{2a(x)}$

On a $K(x, Y^\pm(x)) = 0$.

↔ Points de branchements x^\pm : racines du polynôme $b^2 - 4ac$

Noyau et surface de Riemann

► Le **noyau** K peut s'écrire $K(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

↔ Deux branches : $Y^\pm(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{b^2(x) - 4a(x)c(x)}}{2a(x)}$

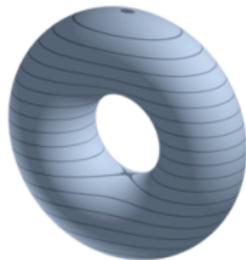
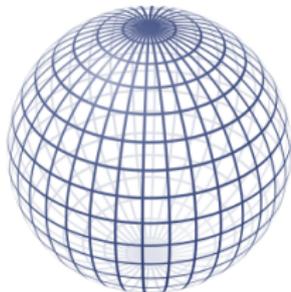
On a $K(x, Y^\pm(x)) = 0$.

↔ Points de branchements x^\pm : racines du polynôme $b^2 - 4ac$

► **Surface de Riemann** $\mathcal{S} =$ zéros du noyau K

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\}$$

- \mathcal{S} est une **sphère** dans le cas **continu** (brownien)
- \mathcal{S} est une **tore** dans le cas **discret** (marches)



- Le noyau peut s'écrire $K(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
- On définit ζ l'automorphisme de \mathcal{S} qui laisse stable x

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, \frac{c(x)}{a(x)} \frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

On a

$$\zeta(x, Y^+(x)) = (x, Y^-(x))$$

De même on note η l'automorphisme de \mathcal{S} qui laisse stable y

Paramétrisation (ou uniformisation) rationnelle

$$\mathcal{S} = \{(x(s), y(s)) : s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$$

où

$$\begin{cases} x(s) = \frac{x^+ + x^-}{2} + \frac{x^+ - x^-}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right) \\ y(s) = \frac{y^+ + y^-}{2} + \frac{y^+ - y^-}{4} \left(\frac{s}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{s} \right) \end{cases}$$

avec

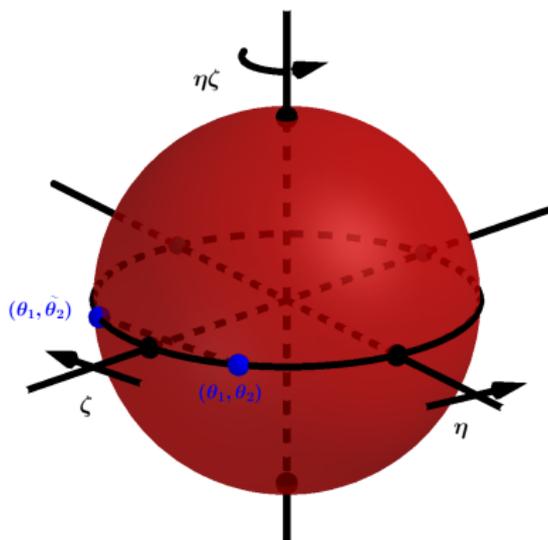
$$\beta = \arccos \left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \right)$$

On note

$$q = e^{2i\beta}$$

on a alors

$$\zeta(s) = \frac{1}{s}, \quad \eta(s) = \frac{q}{s}, \quad \eta\zeta(s) = qs$$



- ζ et η sont des **symétries axiales** de la sphère \mathcal{S}
- $\eta\zeta$ est une **rotation** de d'angle $\beta = \arccos\left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)$
- La **finitude du groupe** $\langle \zeta, \eta \rangle$ équivaut à $\frac{\beta}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Prolongement sur la surface de Riemann

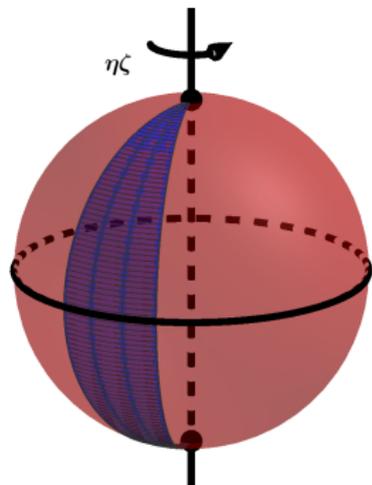
- L_1 et L_2 initialement définies sur un sous domaine de \mathcal{S}
- Grâce à η et ζ et à l'équation

$$0 = K_1(x, y)L_1(y) + K_2(x, y)L_2(x)$$

on a la **formule de prolongement** :

$$L_1(\eta\zeta s) = \frac{K_2(\zeta s)K_1(s)}{K_1(\zeta s)K_2(s)} L_1(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{S}$$

$$L_1(qs) = G(s)L_1(s)$$



Prolongement sur la surface de Riemann

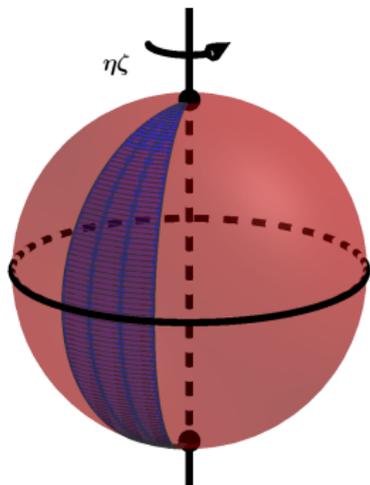
- L_1 et L_2 initialement définies sur un sous domaine de \mathcal{S}
- Grâce à η et ζ et à l'équation

$$0 = K_1(x, y)L_1(y) + K_2(x, y)L_2(x)$$

on a la **formule de prolongement** :

$$L_1(\eta\zeta s) = \frac{K_2(\zeta s)K_1(s)}{K_1(\zeta s)K_2(s)} L_1(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{S}$$

$$L_1(qs) = G(s)L_1(s)$$



- ▶ Par itération on **prolonge méromorphiquement** sur \mathcal{S}
- ▶ Les **pôles** de L_1 proviennent des **zéros** des fonctions K_1 et K_2 et de leurs **images par le groupe** $\langle \zeta, \eta \rangle$

- ▶ **Automorphisme** de Galois de \mathcal{S} et groupe
- ▶ **Paramétrisation** (uniformisation) de la surface de Riemann \mathcal{S}
- ▶ **Prolongement** analytique des transformées de Laplace sur \mathcal{S}
- ▶ Sur \mathcal{S} , la première partie des équations fonctionnelles s'annule :

$$0 = K_1 L_1 + K_2 L_2$$

↔ Simplification (une fonction inconnue en moins)

Objectif : calculer L_1

Méthode : Déterminer un **problème frontière** (en éliminant L_2)

Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

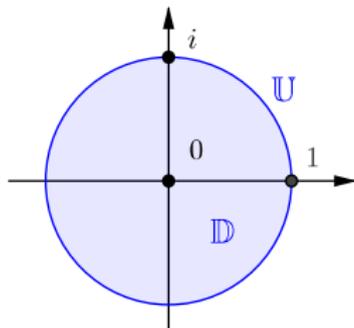
Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

Exemple :

- 1 f est méromorphe sur le disque unité \mathbb{D} et a un seul pôle, d'ordre un en 0
- 2 $f(\bar{x}) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{U}$
le cercle unité



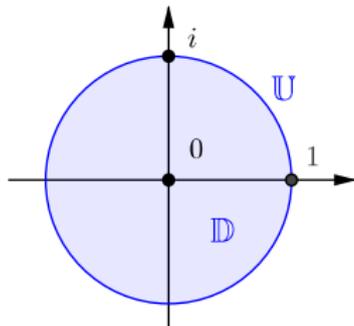
Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

Exemple :

- 1 f est méromorphe sur le disque unité \mathbb{D} et a un seul pôle, d'ordre un en 0
- 2 $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ pour $x \in \mathbb{U}$
le cercle unité



La solution (aux constantes près) est $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

f est une **fonction de collage conforme** qui réunit les parties supérieure et inférieure de \mathbb{U} .

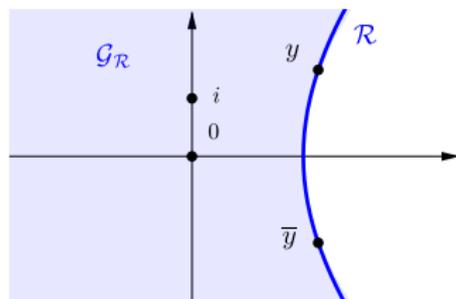
f est un **invariant pour la conjugaison** sur le bord \mathbb{U} .

Problème frontière (2019, F., RASCHEL, Bernoulli)

- 1 L_1 est méromorphe sur $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ et tend vers 0 en l'infini ;
- 2 L_1 vérifie la condition frontière

$$L_1(\bar{y}) = G(y)L_1(y), \quad \forall y \in \mathcal{R}.$$

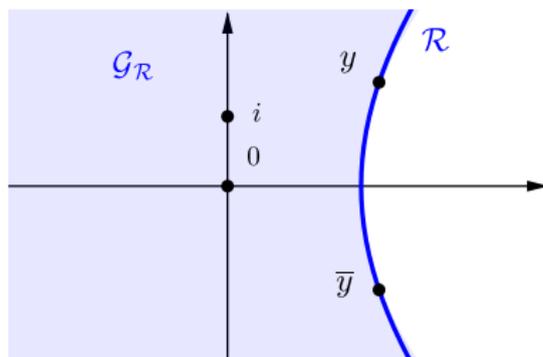
- $G(y) = \frac{K_1}{K_2}(X^-(y), y) \frac{K_2}{K_1}(X^-(y), \bar{y})$
- \mathcal{R} est une **hyperbole** définie par le noyau



• \mathcal{R} **hyperbole** symétrique par rapport aux abscisses qui vérifie :

▶ Si $y \in \mathcal{R}$ et $K(x, y) = 0$ alors $\bar{y} \in \mathcal{R}$ et $K(x, \bar{y}) = 0$

$\Leftrightarrow Y^+(x) \in \mathcal{R} \Rightarrow \overline{Y^+(x)} = Y^-(x) \in \mathcal{R}$



Preuve de la condition frontière

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, Y^+(x))$ et en $(x, Y^-(x))$ pour **annuler le noyau**. On obtient

$$0 = K_1(x, Y^+(x))L_1(Y^+(x)) + K_2(x, Y^+(x))L_2(x)$$

$$0 = K_1(x, Y^-(x))L_1(Y^-(x)) + K_2(x, Y^-(x))L_2(x)$$

On élimine $L_2(x)$ et on déduit que

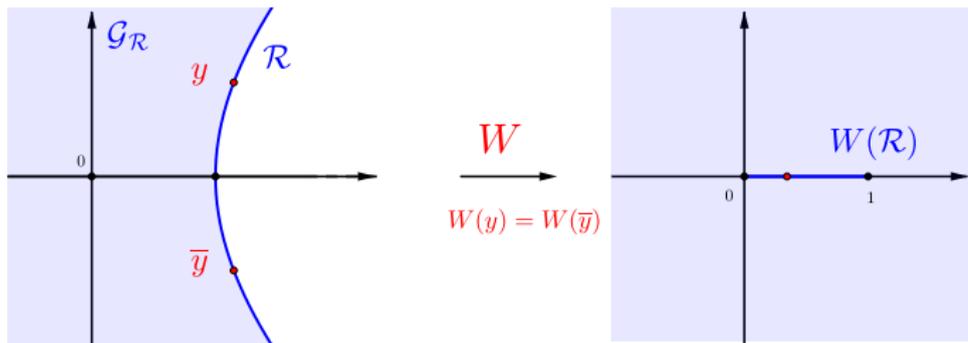
$$\Rightarrow L_1(Y^+(x)) = \underbrace{\frac{K_1(x, Y^-(x))}{K_1(x, Y^+(x))}}_G L_1(Y^-(x))$$

Et donc

$$L_1(\bar{y}) = G(y)L_1(y), \quad \forall y \in \mathcal{R}.$$

Fonction de collage conforme

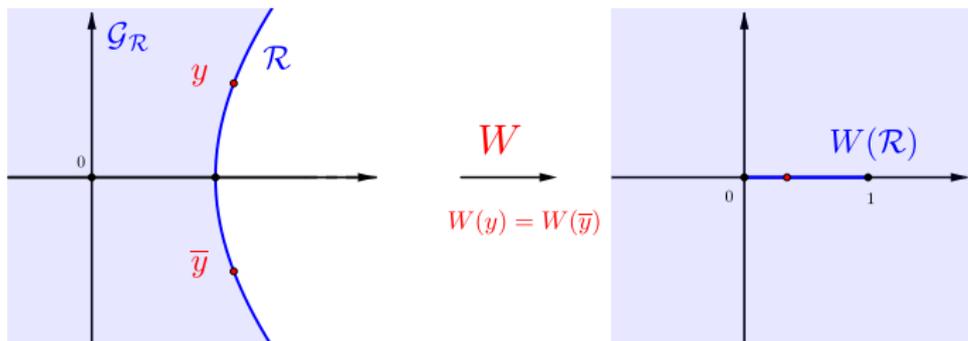
- La **fonction de collage conforme** W (ou invariant canonique) réunit les parties supérieure et inférieure de l'**hyperbole** \mathcal{R}



$$W(y) = T_{\frac{\pi}{\beta}} \left(- \frac{2y - (y^+ + y^-)}{y^+ - y^-} \right)$$

- $\beta = \arccos \left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \right)$ est l'angle du cône
- $T_{\frac{\pi}{\beta}}$ est un **polynôme de Tchebychev généralisé**

$$T_{\frac{\pi}{\beta}}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{\beta} \arccos(x)\right) = \frac{1}{2} \left\{ (x + \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{\pi}{\beta}} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{\pi}{\beta}} \right\}$$



Problème frontière de **Carleman** \rightarrow Problème frontière de **Riemann**

► $L_1(\bar{y}) = G(y)L_1(y), \forall y \in \mathcal{R}$

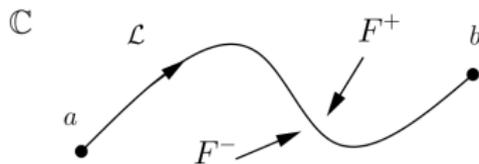
- $M := L_1 \circ W^{-1}$ et
- M^+ et M^- la limite en haut et en bas de M sur $[0, 1]$
- $H := G \circ W^{-1}$

► $M^+(t) = H^-(t)M^-(t), \forall t \in [0, 1]$

Formules de Sokhotski–Plemelj

On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$

$$F(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$



- F est sectionnellement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$
- F^+ et F^- sont les limites de F de part et d'autre de \mathcal{L}

Formule de Sokhotski–Plemelj

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t)$$

$$M = e^F \text{ et } f = \ln H \Rightarrow M^+ = H^- M^-$$

Solution du problème frontière de Riemann

► Si $M^+ = H^- M^-$ alors

$$M = \exp \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\ln H(t)}{t-z} dt$$

Expression intégrale (2019, F., RASCHEL, *Bernoulli*)

$$L_1(y) = \left(\frac{W(0) - W(p)}{W(y) - W(p)} \right)^{-x} \exp \left\{ \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}^-} \log G(t) \frac{W'(t)}{W(t) - W(y)} dt \right\}$$

- ▶ Inversion de la transformée de Laplace L_1
↔ distribution stationnaire

Dans quels cas cette formule intégrale peut se simplifier ?

- 1 Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
- 2 Approche analytique et problème frontière
- 3 Méthode des invariants de Tutte**
- 4 Exemples

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Preuve algébrique.

$$y^2 - y(x + 1/x) + 1 = 0$$

$$Y_0(x) = x \text{ et } Y_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$J(x) = \boxed{J(Y_0) = J(Y_1)} = \frac{1}{2}(J(Y_0) + J(Y_1))$$

Fraction rationnelle symétrique des racines.

► J est une fraction rationnelle des coefficients et donc de $I(x) = (x + \frac{1}{x})$. □

• $J(x)$ est l'**invariant inconnu**

• $I(x) = (x + \frac{1}{x})$ est l'**invariant canonique** ou la fonction de collage conforme

• $J(x)$ est une **fraction rationnelle** en $I(x)$

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Preuve analytique.

$I : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ application
 $x \mapsto (x + 1/x)$ conforme.

$\forall x \in \mathbb{U} \quad I(x) = I(\bar{x}) \in [-2, 2]$ et $J(x) = J(\bar{x})$.

$J \circ I^{-1}$ bien définie et continue en $[-2, 2]$.

$J \circ I^{-1}$ méromorphe sur \mathbb{C} , a un nombre fini de pôles et une croissance bornée à l'infini.

► $J \circ I^{-1}$ est une fraction rationnelle. \square

• $J(x)$ est l'**invariant inconnu**

• $I(x) = (x + \frac{1}{x})$ est l'**invariant canonique** ou la fonction de collage conforme

• $J(x)$ est une **fraction rationnelle** en $I(x)$

Méthode analytique des invariants de Tutte

- Trouver une **équation fonctionnelle** ;
- Étudier le **noyau** et les différentes branches X^\pm et Y^\pm ;
- Établir un **problème frontière** ;
- Déterminer deux invariants :
 - un **invariant canonique** tel que $I(Y^+) = I(Y^-)$,
 - un **invariant dépendant des fonctions inconnues** J ;
- Trouver des **fonctions de découplage** pour déterminer J ;
- Utiliser un **lemme des invariants** pour exprimer J comme une fraction rationnelle en l .

Résultats

- Formules explicites (sans intégrales)
- Nature algébrique

Définition (Invariant)

I est un **invariant si et seulement si** il est méromorphe et l'une des trois conditions équivalentes est satisfaite

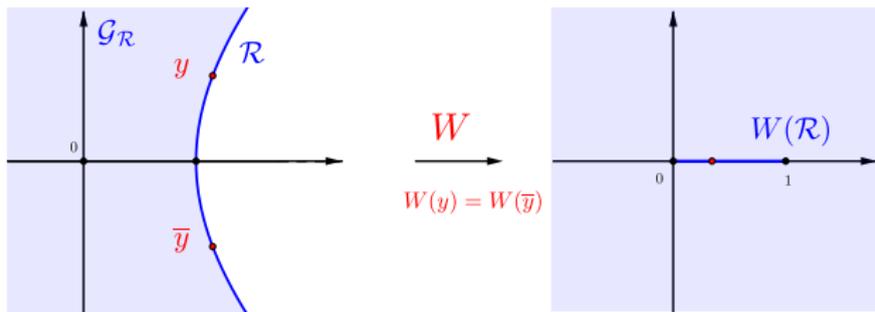
- $I(Y^+) = I(Y^-)$
- $I(y) = I(\bar{y}), \forall y \in \mathcal{R}$
- $I(qs) = I(s)$

Définition (Invariant)

I est un **invariant si et seulement si** il est méromorphe et l'une des trois conditions équivalentes est satisfaite

- $I(Y^+) = I(Y^-)$
- $I(y) = I(\bar{y}), \forall y \in \mathcal{R}$
- $I(qs) = I(s)$

- L'invariant **canonique** est la **fonction de collage conforme** W qui réunit les parties supérieure et inférieure de **l'hyperbole** \mathcal{R}



1. Découplage (version analytique)

Condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$L_1(\bar{y}) = G(y)L_1(y).$$

Définition (analytique)

Une fonction de découplage F est une fraction rationnelle telle que $\forall y \in \mathcal{R}$,

$$G(y) = \frac{F(y)}{F(\bar{y})}.$$

1. Découplage (version analytique)

Condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$L_1(\bar{y}) = G(y)L_1(y).$$

Définition (analytique)

Une **fonction de découplage** F est une fraction rationnelle telle que $\forall y \in \mathcal{R}$,

$$G(y) = \frac{F(y)}{F(\bar{y})}.$$

On peut alors reformuler la condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$(F \cdot L_1)(\bar{y}) = (F \cdot L_1)(y).$$

- Donc $F \cdot L_1$ est un invariant (inconnu).

2. Découplage (version algébrique)

La condition frontière provient de l'équation

$$L_1(Y^+(x)) = \frac{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^-(x))}{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^+(x))} L_1(Y^-(x)).$$

La définition suivante est équivalente à la définition "analytique".

Définition (algébrique)

Une fonction de découplage F est une fraction rationnelle telle que

$$\frac{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^-(x))}{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^+(x))} = \frac{F(Y^-(x))}{F(Y^+(x))}.$$

2. Découplage (version algébrique)

La condition frontière provient de l'équation

$$L_1(Y^+(x)) = \frac{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^-(x))}{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^+(x))} L_1(Y^-(x)).$$

La définition suivante est équivalente à la définition "analytique".

Définition (algébrique)

Une fonction de découplage F est une fraction rationnelle telle que

$$\frac{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^-(x))}{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^+(x))} = \frac{F(Y^-(x))}{F(Y^+(x))}.$$

On a alors

$$(F \cdot L_1)(Y^+(x)) = (F \cdot L_1)(Y^-(x)).$$

- On retrouve que $F \cdot L_1$ est un invariant (inconnu).

3. Découplage (version q -différences)

Équation aux q -différences ($q = e^{2i\beta}$)

$$L_1(qs) = G(s)L_1(s).$$

La définition suivante est équivalente aux définitions “analytique” et “algébrique”.

Définition (q -différences)

Une **fonction de découplage** F est une fraction rationnelle telle que

$$G(s) = \frac{F(s)}{F(qs)}.$$

3. Découplage (version q -différences)

Équation aux q -différences ($q = e^{2i\beta}$)

$$L_1(qs) = G(s)L_1(s).$$

La définition suivante est équivalente aux définitions “analytique” et “algébrique”.

Définition (q -différences)

Une **fonction de découplage** F est une fraction rationnelle telle que

$$G(s) = \frac{F(s)}{F(qs)}.$$

On a alors

$$(F \cdot L_1)(qs) = (F \cdot L_1)(s).$$

- On retrouve que $F \cdot L_1$ est un invariant (inconnu).

Découplage multiplicatif

Définition (Paire de découplage)

Une **paire de fonctions de découplage** (E, F) est une paire de fractions rationnelles telle que

$$\frac{K_1(x, y)}{K_2(x, y)} = \frac{F(y)}{E(x)}.$$

Cela implique que F est une fonction de découplage.

En résumé :

- la fonction de collage conforme W est un invariant canonique,
- si F est une fonction de découplage alors $F \cdot L_1$ est un invariant inconnu.

En fait il existe “**peu d’invariants**”.

En résumé :

- la fonction de collage conforme W est un invariant canonique,
- si F est une fonction de découplage alors $F \cdot L_1$ est un invariant inconnu.

En fait il existe “**peu d’invariants**”.

Lemme des invariants

L’invariant $F \cdot L_1$ s’exprime en fonction de W et il existe une fraction rationnelle E telle que

$$(F \cdot L_1)(y) = E(W(y)).$$

↔ L’étude des pôles et des zéros de $F \cdot L_1$ permet de déterminer E .

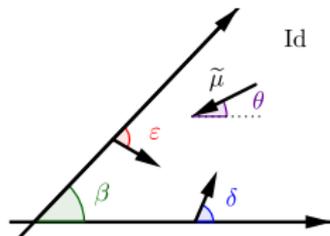
Théorème (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Une fonction de découplage **existe** ssi

$$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta} \mathbb{Z}.$$

↔ On peut la déterminer explicitement.

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



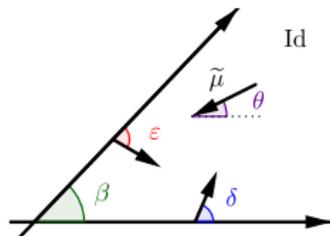
Théorème (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Une fonction de découplage **existe** ssi

$$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta} \mathbb{Z}.$$

↪ On peut la déterminer explicitement.

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Théorème (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Si $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta} \mathbb{Z}$, alors il existe une fraction **rationnelle** $A \in \mathbb{C}(X, Y)$ explicite telle que la transformée de Laplace L_1 vaut

$$L_1(y) = A(y, W(y)),$$

où W est la fonction de collage conforme.

Définition

Une fonction de **double découplage** est une fonction qui découple G^2 mais pas G :

$$G^2(y) = \frac{F(y)}{F(\bar{y})}, \quad \forall y \in \mathcal{R}.$$

Théorème (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHÉL)

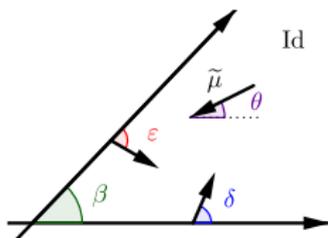
Une fonction de **double découplage existe ssi**

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta} \mathbb{Z}.$$

\Leftrightarrow **expression explicite algébrique** de $L_1(y)$
en fonction de y et de $W(y)$.

$$\alpha_1 = \frac{2\epsilon + \theta - \beta - \pi}{\beta}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\delta - \theta - \pi}{\beta}$$



- La nature algébrique de L_1 dépend donc de celle de W .

Nature algébrique (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Nature algébrique de la transformée de Laplace de la distribution stationnaire

| | D-algébrique | D-finie | Algébrique | Rationnelle |
|-------------------------------|---|--|---|----------------------------|
| $\beta/\pi \notin \mathbb{Q}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0 + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} \cup \left(-\mathbb{N} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}\right)$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |
| $\beta/\pi \in \mathbb{Q}$ | toujours | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |

- ▶ La nature algébrique de L_1 dépend donc de celle de W .

Nature algébrique (2021, BOUSQUET-MÉLOU, PRICE, F., HARDOUIN, RASCHEL)

Nature algébrique de la transformée de Laplace de la distribution stationnaire

| | D-algébrique | D-finie | Algébrique | Rationnelle |
|-------------------------------|---|--|---|----------------------------|
| $\beta/\pi \notin \mathbb{Q}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0 + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} \cup \left(-\mathbb{N} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}\right)$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |
| $\beta/\pi \in \mathbb{Q}$ | toujours | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$, ou $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ | $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ |

- ▶ La méthode des **invariants de Tutte** a permis de montrer la condition **suffisante**.
- ▶ Pour montrer la condition **nécessaire** on fait appel à la théorie de Galois différentielle des **équations aux q -différences**.

Équation aux q -différences

$$L_1(s) = G(s)L_1(qs)$$

Si L_1 est D -algébrique alors

La **théorie de Galois différentielle** transfère des propriétés de la fonctions "racine" (ici L_1) sur les coefficients de l'équation (ici G).

Cette théorie dit alors que :

$$G(s) = \frac{F(s)}{F(qs)} \quad \text{ou} \quad G^2(s) = \frac{F(s)}{F(qs)}$$

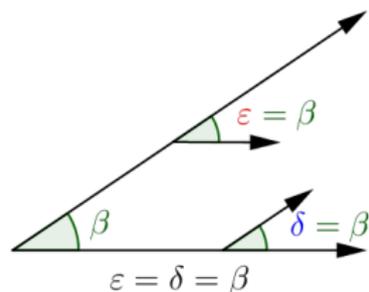
► On en déduit qu'il existe un découplage ou un double découplage !

- 1 Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
- 2 Approche analytique et problème frontière
- 3 Méthode des invariants de Tutte
- 4 Exemples**

$$\alpha = 2 - \frac{\pi}{\beta}$$

G se découple :

$$G(y) = \frac{\bar{y}}{y}$$



Théorème (2017, F., RASCHEL, ESAIM)

Dans le cas orthogonal

$$L_1(y) = \frac{-\mu_1 W'(0)}{W(y) - W(0)} y,$$

où W est la fonction de collage conforme.

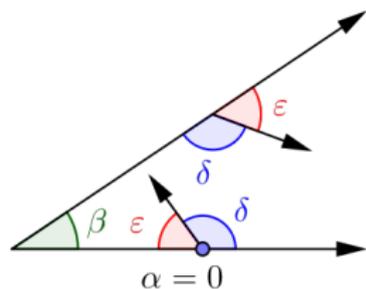
Cas de la *skew* symétrie

$$\alpha = 0$$

Rebonds sont symétriques par rapport à la normale

Pour un certain $a \in \mathbb{R}$ on peut découpler G sous la forme

$$G(y) = \frac{a - y}{a - \bar{y}}.$$



Théorème (*Skew* symétrie)

Dans le cas de la skew symétrie

$$L_1(y) = \frac{Cte}{a - y}.$$

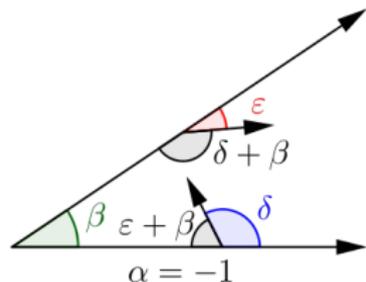
La distribution stationnaire a une forme produit sur \mathbb{R}^2 et est exponentielle.

$$\alpha \in -\mathbb{N}$$

On peut découpler G :

$$G(y) = \frac{P(y)}{P(\bar{y})}$$

pour un certain polynôme P .



Théorème (Dieker-Moriarty)

Dans le cas de **Dieker-Moriarty**

$$L_1(y) = \frac{Cte}{P(y)},$$

La distribution stationnaire est alors une **somme d'exponentielles**.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

► **Double découplage** possible

Théorème (Cas algébrique remarquable)

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ on a

$$L_1(y) = \frac{Cte}{\sqrt{y^+ - y}},$$

La distribution stationnaire frontière est une **loi Gamma**.

La distribution stationnaire π vaut en coordonnées polaires (ρ, t)

$$\pi(\rho, t) = \frac{C}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\frac{\theta - t}{2}\right) e^{-2\rho|\mu| \cos^2\left(\frac{\theta - t}{2}\right)}$$

Merci pour votre attention !



BERNARDI, O., BOUSQUET-MELOU, M., RASCHEL, K. - "Counting quadrant walks via Tutte's invariant method.", *In Proceedings of FPSAC 2016, Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, pages 203–214. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy (2016).



M. BOUSQUET-MELOU, A. ELVEY PRICE, S. FRANCESCHI, C. HARDOUIN, K. RASCHEL - "The stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge : differential properties", arXiv:2101.01562 (2021)



A. DIEKER AND J. MORIARTY - "Reflected Brownian motion in a wedge : sum-of-exponential stationary densities.", *Electron. Commun. Probab.*, 14 :1–16, (2009).



T. DREYFUS, C. HARDOUIN, J. ROQUES, AND M. F. SINGER. - "On the nature of the generating series of walks in the quarter plane.", *Invent. Math.*, 213(1) :139–203, (2018).



G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI AND V. MALYSHEV - *Random walks in the quarter-plane*, Application of Mathematics (New York), vol. 40, Springer, (1999).



S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Tutte's invariant approach for Brownian motion reflected in the quadrant", *ESAIM Probab. Stat.*, (2017).



S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Integral expression for the stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge", *Bernoulli*, (2019).



W. TUTTE - "Chromatic sums revisited.", *Aequationes Math.*, 50(1-2) :95–134 (1995).



R. J. WILLIAMS - "Semimartingale reflecting Brownian motions in the orthant.", *Stochastic Networks*, 13 (1995).