

Un algorithme en ligne pour  
**Une bijection entre des classes de marches  
Nord – Ouest – Sud-Est**

Frédéric Chyzak



Le 12 juillet 2016

Problème (posé par Alin Bostan le 08/02/2015)

Expliciter une bijection entre les modèles :

- $\mathcal{H}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au demi-plan } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \text{ partant de l'origine et y terminant} \}$
- $\mathcal{Q}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au quart de plan } \mathbb{N}^2, \text{ partant de l'origine et terminant sur la diagonale} \}$

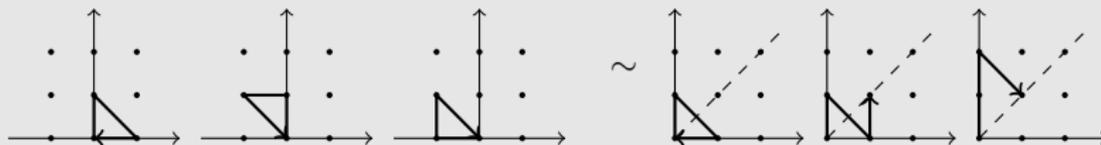
# Marches sur le réseau carré : demi-plan vs quart de plan

Problème (posé par Alin Bostan le 08/02/2015)

Expliciter une bijection entre les modèles :

- $\mathcal{H}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au demi-plan } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \text{ partant de l'origine et y terminant} \}$
- $\mathcal{Q}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au quart de plan } \mathbb{N}^2, \text{ partant de l'origine et terminant sur la diagonale} \}$

$n = 3$ , trois marches dans chaque modèle



1, 0, 0, 3, 0, 0, 30, 0, 0, 420, 0, 0, 6930, 0, 0, 126126, 0, 0, ...

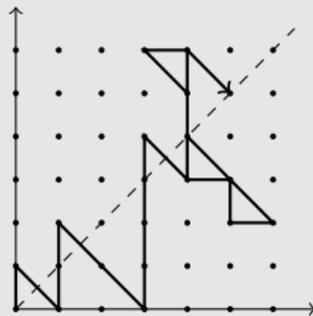
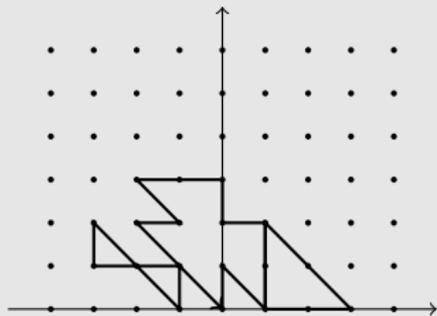
# Marches sur le réseau carré : demi-plan vs quart de plan

Problème (posé par Alin Bostan le 08/02/2015)

Expliciter une bijection entre les modèles :

- $\mathcal{H}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au demi-plan } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \text{ partant de l'origine et y terminant} \}$
- $\mathcal{Q}(n) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au quart de plan } \mathbb{N}^2, \text{ partant de l'origine et terminant sur la diagonale} \}$

$$n = 24 = 3 \times 8$$



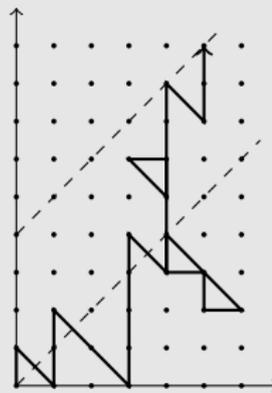
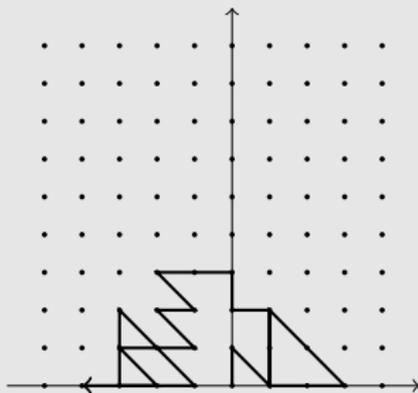
# Marches sur le réseau carré : demi-plan vs quart de plan

## Problème généralisé

Expliciter une bijection entre les modèles généralisés :

- $\mathcal{H}(n, k) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au demi-plan } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \text{ partant de l'origine et terminant en } (-k, 0) \}$
- $\mathcal{Q}(n, k) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au quart de plan } \mathbb{N}^2, \text{ partant de l'origine et terminant sur } y - x = k \}$

$$n = 28 = 3 \times 8 + 4$$



Problème relâché (déjà résolu)

Expliciter une bijection entre les modèles :

- $\mathcal{H}(n, *) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au demi-plan } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \text{ partant de l'origine et terminant sur } y = 0 \}$
- $\mathcal{Q}(n, *) = \{ \text{marches de longueur } n, \text{ sur les pas } \uparrow, \leftarrow, \searrow, \text{ confinées au quart de plan } \mathbb{N}^2, \text{ partant de l'origine et terminant n'importe où } \}$

## Travaux antérieurs

- immédiat :  $\mathcal{H}(n, *) \sim \mathcal{M}(n)$
  - immédiat :  $\mathcal{Q}(n, *) \sim \mathcal{Y}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$
  - Regev (1981) :  $|\mathcal{T}_3(n)| = |\mathcal{M}(n)|$
  - Schensted (1961) :  $\mathcal{T}_3(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$
  - Gouyou-Beauchamps (1989) :  
 $\mathcal{I}_3(n) \sim \{ \text{involutions de } [n] \text{ sans « pile » de hauteur } 2 \}$
  - Eu, Fu, Hou, Hsu (2013), voir aussi Eu (2010) :  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{Y}_3(n)$
- 
- $\mathcal{I}_3(n) = \{ \text{involutions de } [n] \text{ sans sous-suites décroissantes de long. } 4 \}$
  - $\mathcal{M}(n) = \{ \text{marches de Motzkin de longueur } n \}$
  - $\mathcal{T}_3(n) = \{ \text{tableaux de Young standard de } n \text{ cellules et de hauteur } \leq 3 \}$
  - $\mathcal{Y}_3(n) = \{ \text{mots de Yamanouchi n'utilisant que } 1, 2, 3 \}$

## Travaux antérieurs

- immédiat :  $\mathcal{H}(n, *) \sim \mathcal{M}(n)$
- immédiat :  $\mathcal{Q}(n, *) \sim \mathcal{Y}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$
- Regev (1981) :  $|\mathcal{T}_3(n)| = |\mathcal{M}(n)|$
- Schensted (1961) :  $\mathcal{T}_3(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$
- Gouyou-Beauchamps (1989) :  
 $\mathcal{I}_3(n) \sim \{ \text{involutions de } [n] \text{ sans « pile » de hauteur } 2 \}$
- Eu, Fu, Hou, Hsu (2013), voir aussi Eu (2010) :  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{Y}_3(n)$
  
- $\mathcal{I}_3(n) = \{ \text{involutions de } [n] \text{ sans sous-suites décroissantes de long. } 4 \}$
- $\mathcal{M}(n) = \{ \text{marches de Motzkin de longueur } n \}$
- $\mathcal{T}_3(n) = \{ \text{tableaux de Young standard de } n \text{ cellules et de hauteur } \leq 3 \}$
- $\mathcal{Y}_3(n) = \{ \text{mots de Yamanouchi n'utilisant que } 1, 2, 3 \}$

## Conclusion provisoire

- $|\mathcal{H}(n, *)| = |\mathcal{Q}(n, *)|$ , diverses preuves et bijections connues
- les bijections connues préservent-elles le paramètre  $k$  ?

- par principe de réflexion d'André multidimensionnel + réductions de sommes : en utilisant Zeilberger (1983)
- par résolution d'équations du noyau : par variante de Bousquet-Mélou & Mishna (2009)
- par télescopage créatif : par Bousquet-Mélou & Mishna (2009) + Bostan, Chyzak, van Hoeij, Kauers & Pech (2016+)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

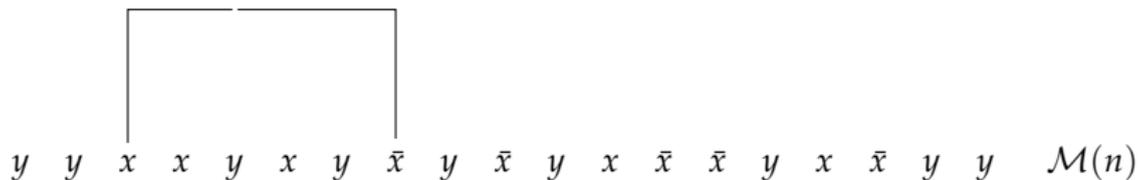
# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

$y y x x y x y \bar{x} y \bar{x} y x \bar{x} \bar{x} y x \bar{x} y y \mathcal{M}(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

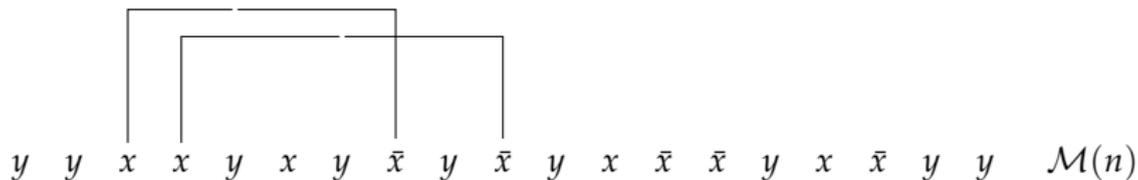
$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

# La composition de transformations classiques sur un exemple

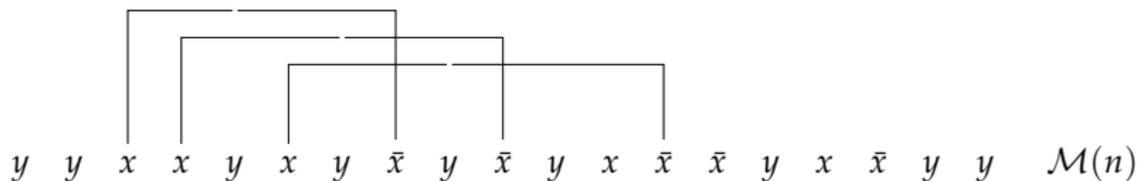
$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

# La composition de transformations classiques sur un exemple

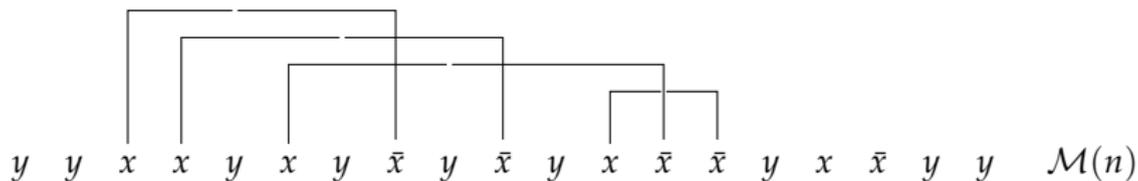
$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

# La composition de transformations classiques sur un exemple

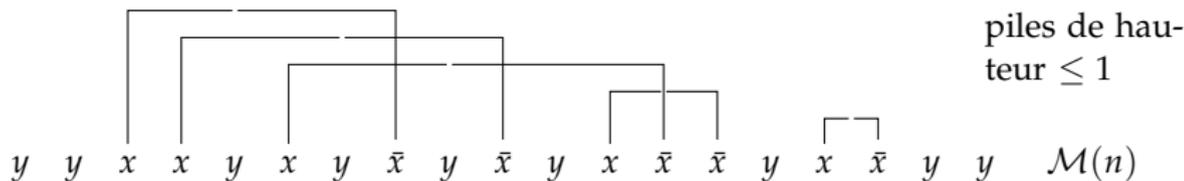
$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

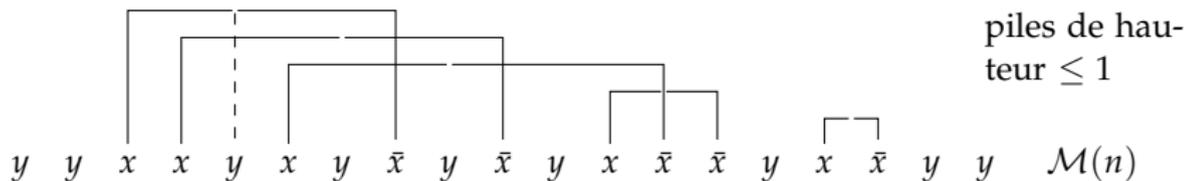


Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

Pile = emboîtement d'arches sans croisement.

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

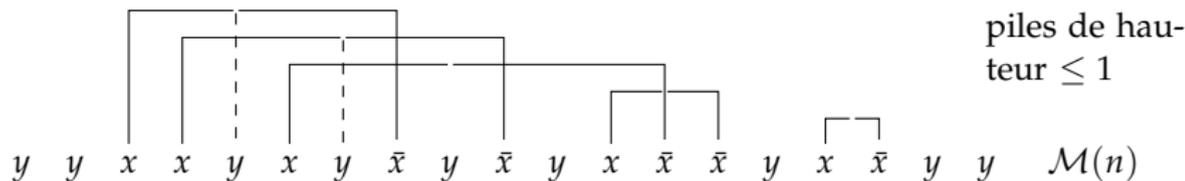


Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

Pour  $\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : distinguer un  $y$  si le plus à gauche dans une arche  $x\text{-}\bar{x}$ .

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

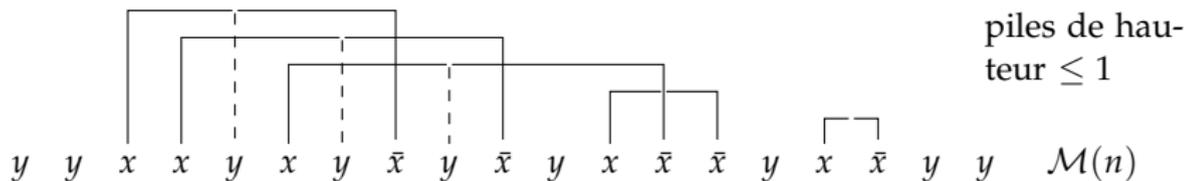


Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

Pour  $\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : distinguer un  $y$  si le plus à gauche dans une arche  $x\text{-}\bar{x}$ .

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

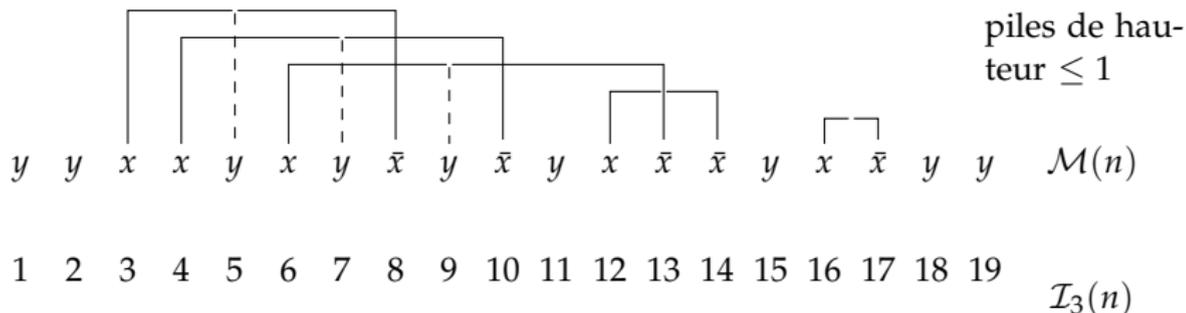


Pour  $\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n)$  : de gauche à droite, associer  $x$  avec le premier  $\bar{x}$  qui suit.

Pour  $\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : distinguer un  $y$  si le plus à gauche dans une arche  $x-\bar{x}$ .

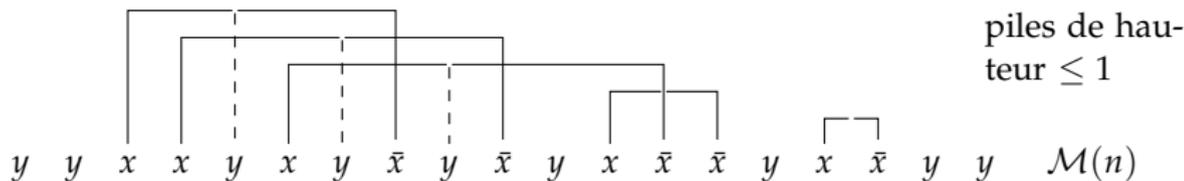
# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

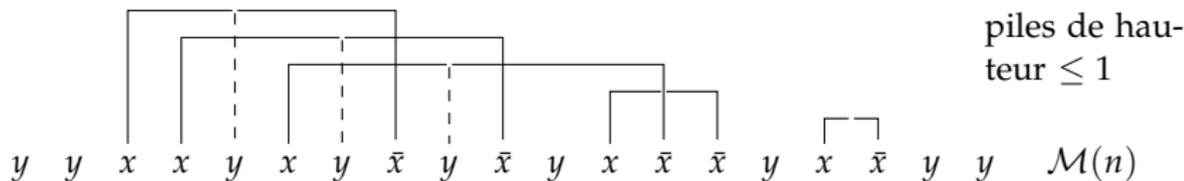


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 8 3

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



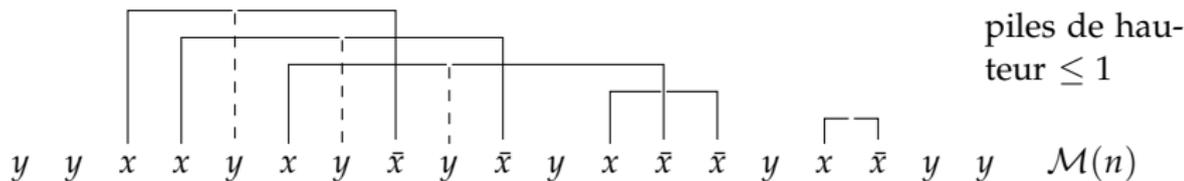
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

8 10 3 4

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



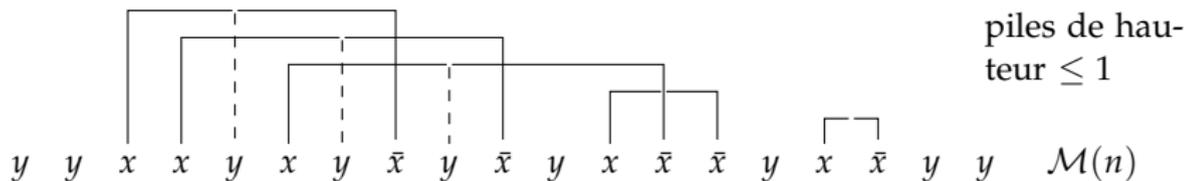
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

8 10 13 3 4 6

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

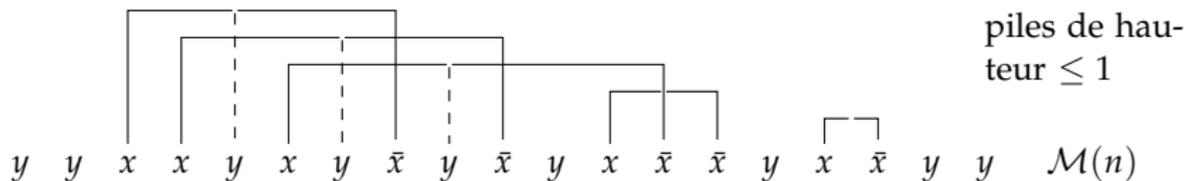


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 8 10 13 3 4 14 6 12

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



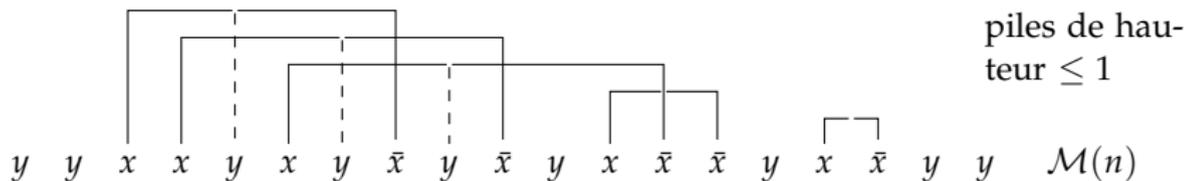
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

8 10 13 3 4 14 6 12 17 16

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

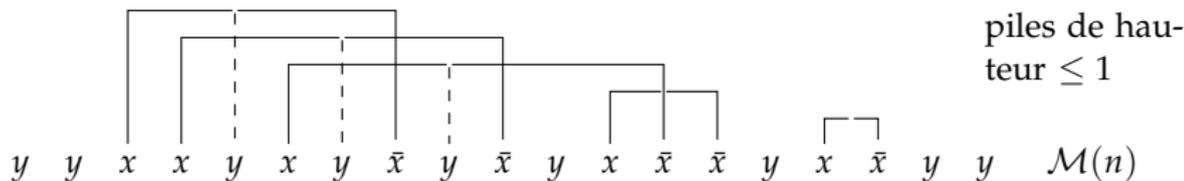


|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |                    |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |                    |
| 1 |   | 8 | 10 |   | 13 |   | 3 |   | 4  |    | 14 | 6  | 12 |    | 17 | 16 |    |    |  | $\mathcal{I}_3(n)$ |

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

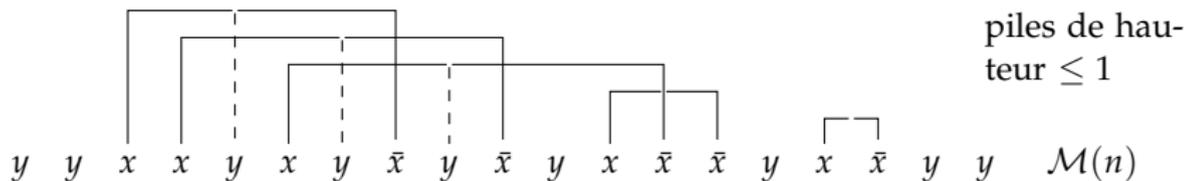


|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |                    |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |                    |
| 1 | 2 | 8 | 10 |   | 13 |   | 3 |   | 4  |    | 14 | 6  | 12 |    | 17 | 16 |    |    | $\mathcal{I}_3(n)$ |

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



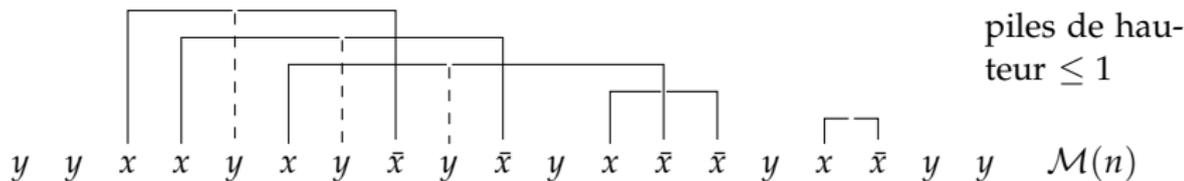
|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 |   | 3 |   | 4  |    | 14 | 6  | 12 |    | 17 | 16 |    |    |  |

$\mathcal{I}_3(n)$

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



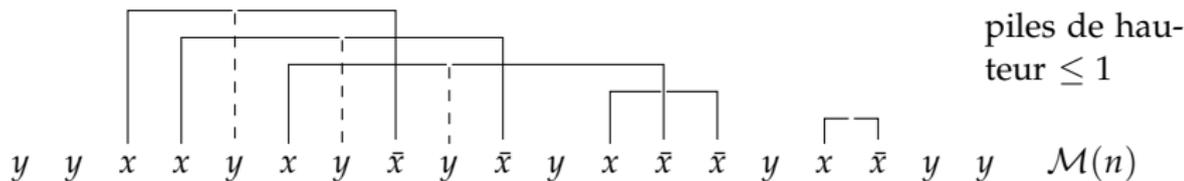
|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 | 7 | 3 |   | 4  |    | 14 | 6  | 12 |    | 17 | 16 |    |    |  |

$\mathcal{I}_3(n)$

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

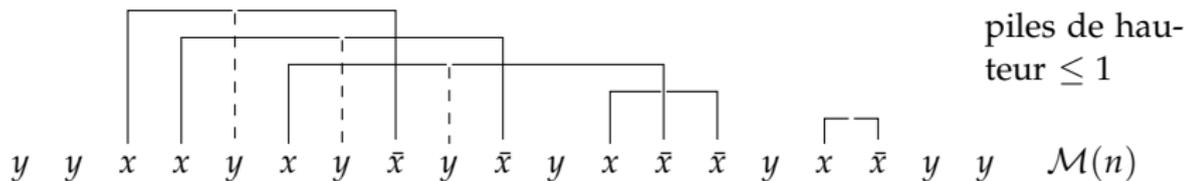


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 14 6 12 17 16

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

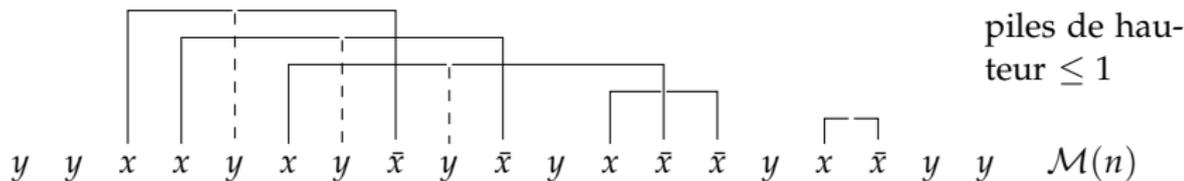


|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |                    |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |                    |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 | 7 | 3 | 9 | 4  | 11 | 14 | 6  | 12 |    | 17 | 16 |    |    |  | $\mathcal{I}_3(n)$ |

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

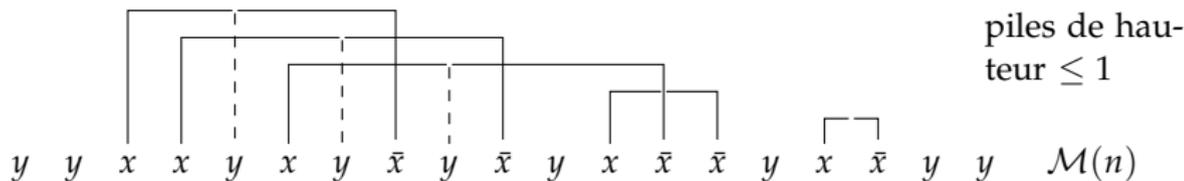


|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |                    |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |                    |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 | 7 | 3 | 9 | 4  | 11 | 14 | 6  | 12 | 15 | 17 | 16 |    |    |  | $\mathcal{I}_3(n)$ |

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



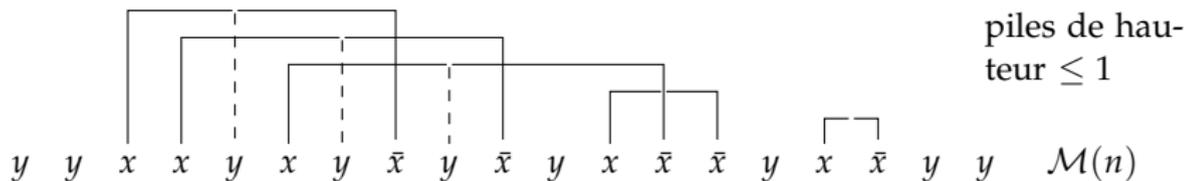
|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 | 7 | 3 | 9 | 4  | 11 | 14 | 6  | 12 | 15 | 17 | 16 | 18 |    |  |

$\mathcal{I}_3(n)$

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$

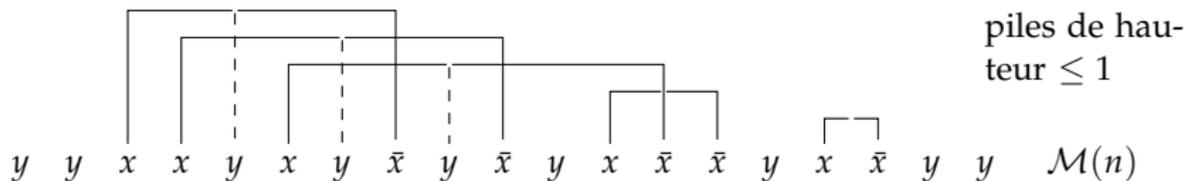


|   |   |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |                    |
|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |                    |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 | 13 | 7 | 3 | 9 | 4  | 11 | 14 | 6  | 12 | 15 | 17 | 16 | 18 | 19 | $\mathcal{I}_3(n)$ |

$\mathcal{M}(n) \sim \mathcal{I}_3(n) : x-\bar{x} \rightarrow \text{transposition et } y \rightarrow \text{point fixe.}$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



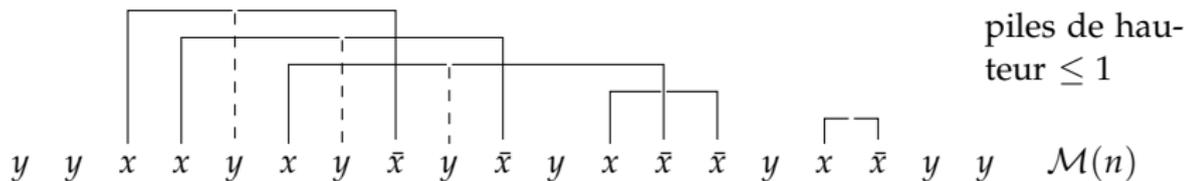
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 $\mathcal{I}_3(n)$

1

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



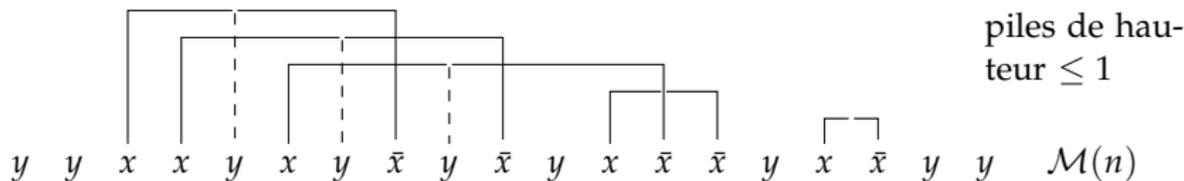
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



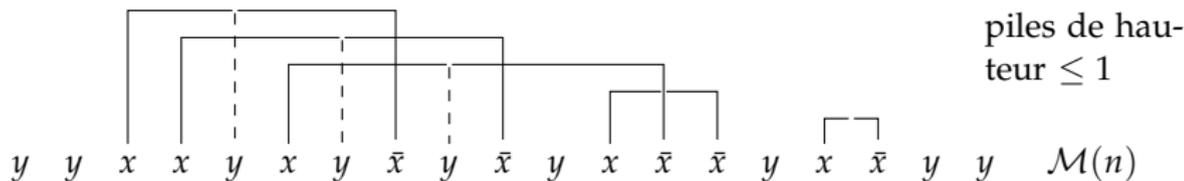
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 8

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



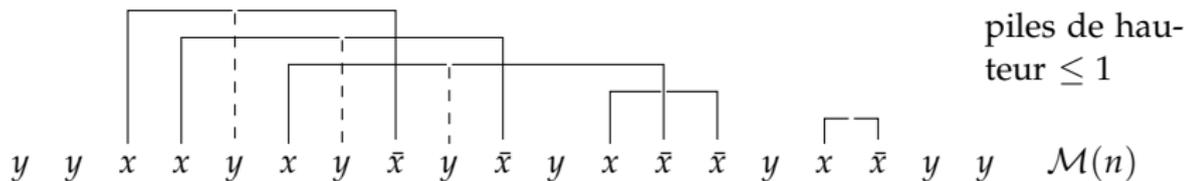
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 **10** 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 8 10

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



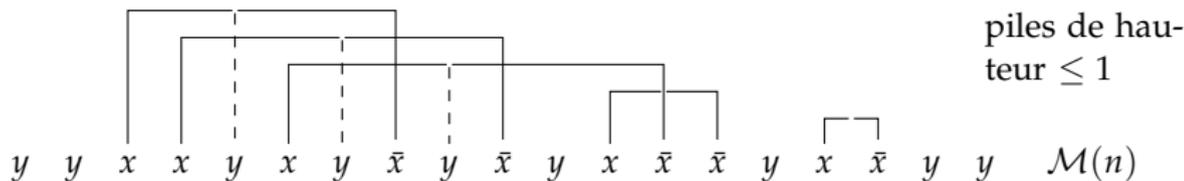
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 5 10  
 8

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



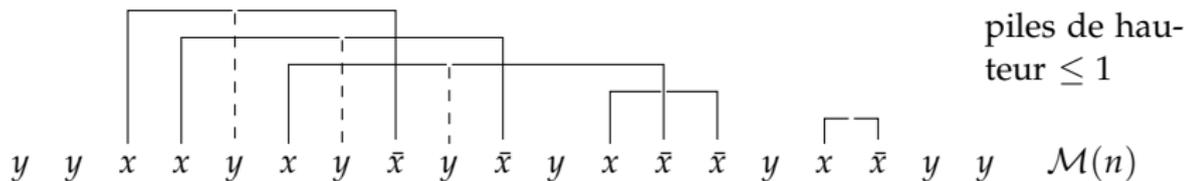
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 **13** 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 5 10 13  
 8

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



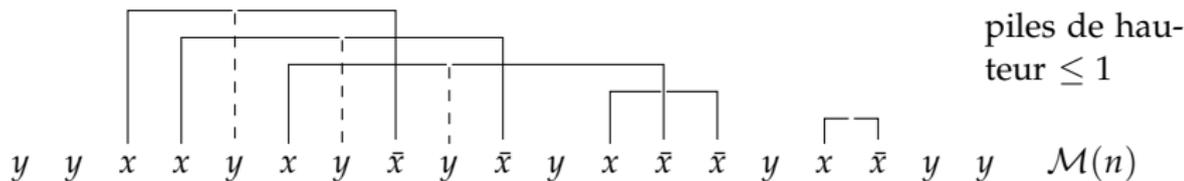
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 5 7 13  
 8 10

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



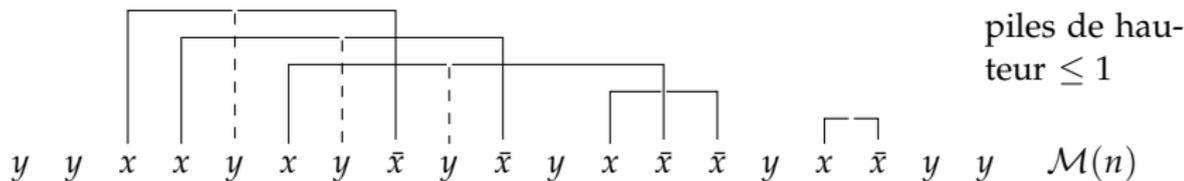
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 7 13  
 5 10  
 8

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



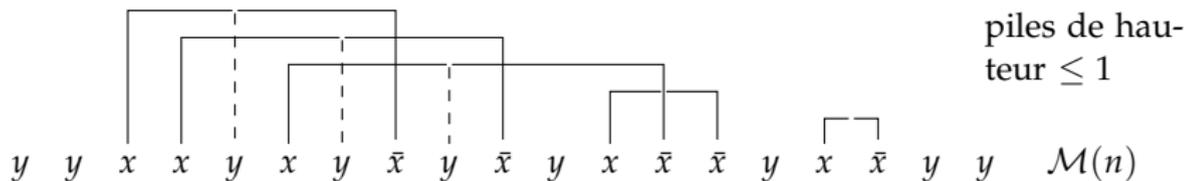
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 7 9  
 5 10 13  
 8

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



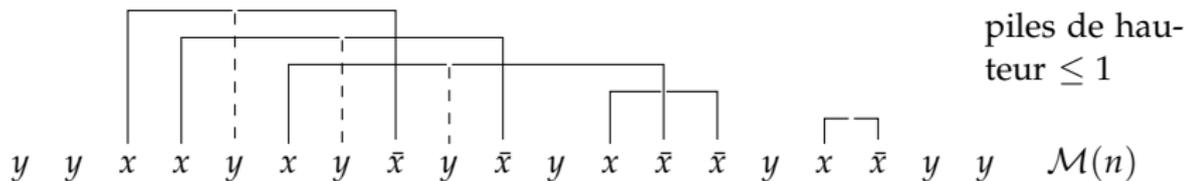
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 9  
 5 7 13  
 8 10

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



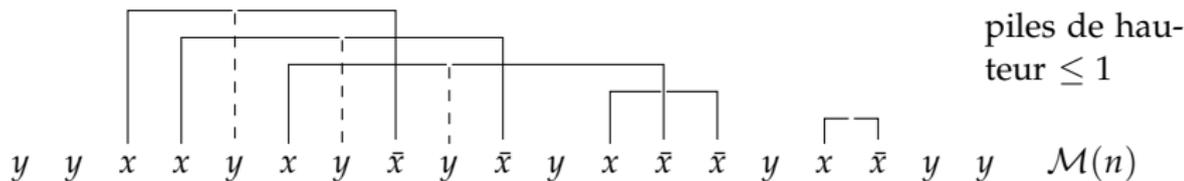
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 9 11  
 5 7 13  
 8 10

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



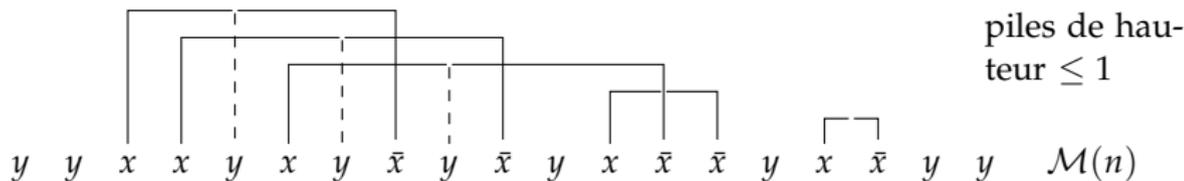
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 9 11 14  
 5 7 13  
 8 10

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



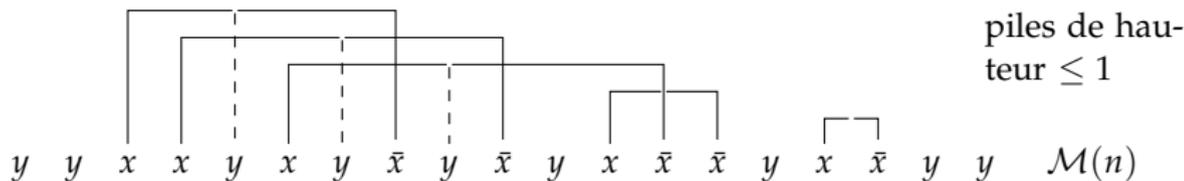
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 14  
 5 7 9  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



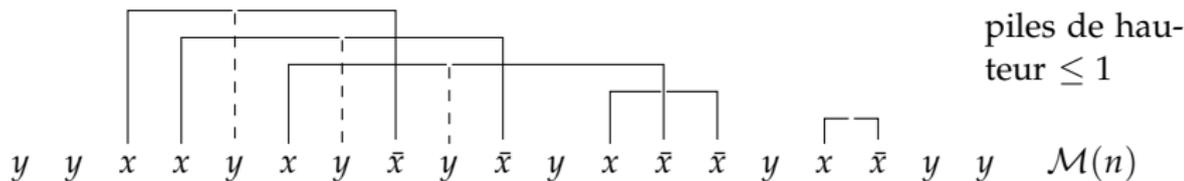
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12  
 5 7 9 14  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



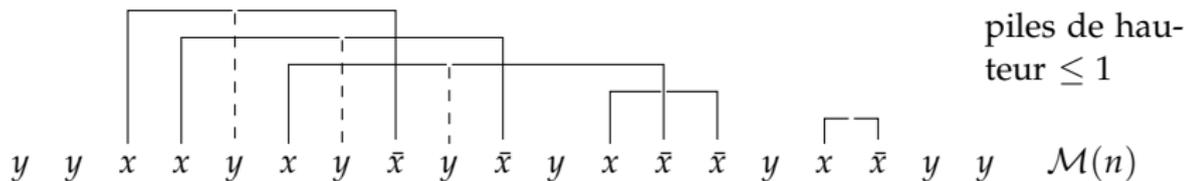
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15  
 5 7 9 14  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



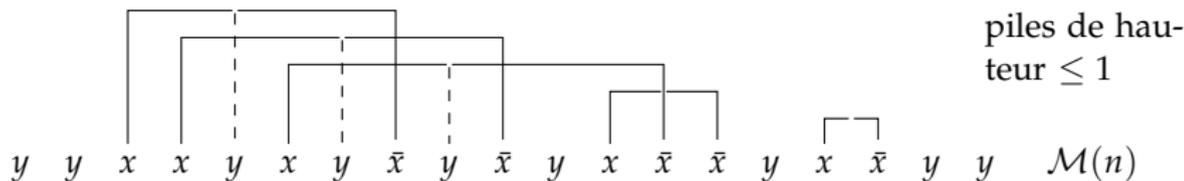
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 17  
 5 7 9 14  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



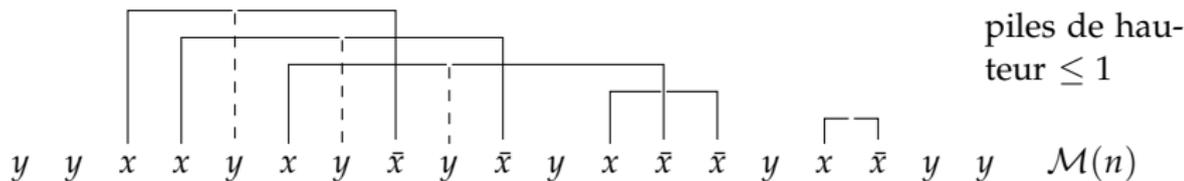
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



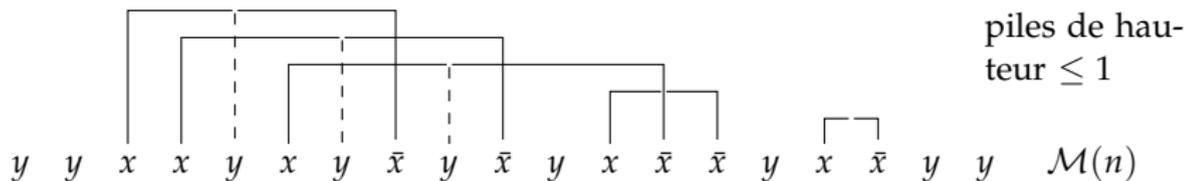
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



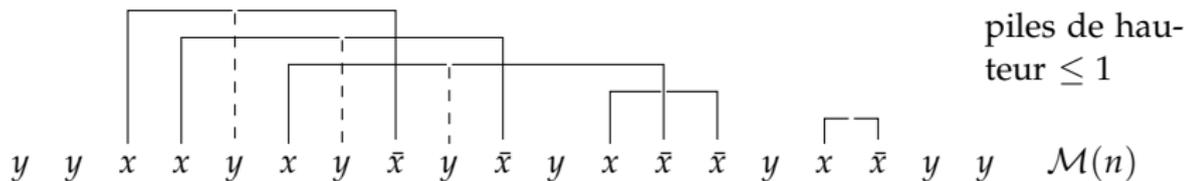
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
 (Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



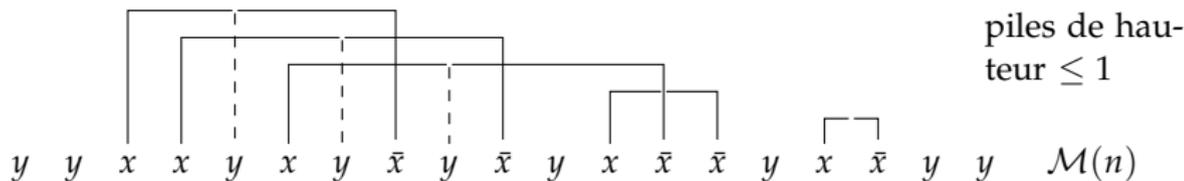
$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19$   
 $1 \ 2 \ 8 \ 10 \ 5 \ 13 \ 7 \ 3 \ 9 \ 4 \ 11 \ 14 \ 6 \ 12 \ 15 \ 17 \ 16 \ 18 \ 19$ 
 $\mathcal{I}_3(n)$

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 11 \ 12 \ 15 \ 16 \ 18 \ 19$   
 $5 \ 7 \ 9 \ 14 \ 17$   
 $8 \ 10 \ 13$ 
 $\mathcal{T}_3(n)$

$\mathcal{I}_3(n) \sim \mathcal{T}_3(n)$  : par correspondance de Robinson–Schensted.  
(Seul le  $P$ -symbole sert.)

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



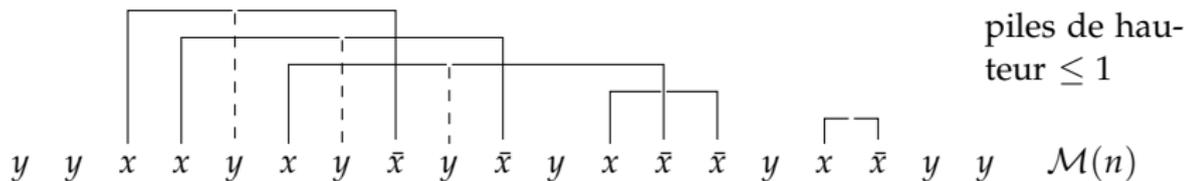
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  $\mathcal{T}_3(n)$   
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



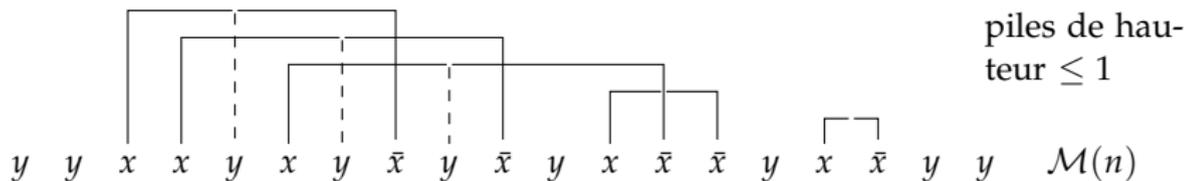
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



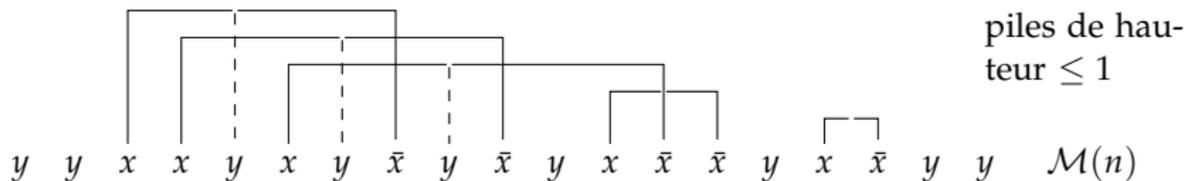
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



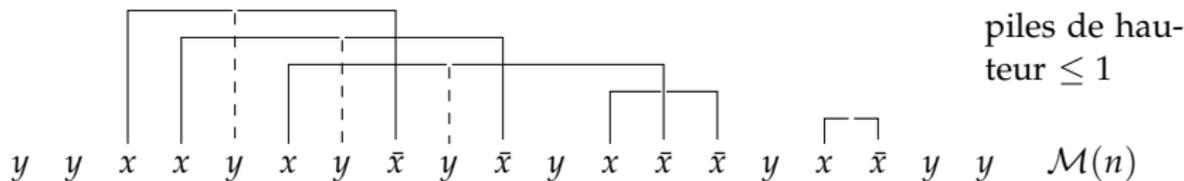
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



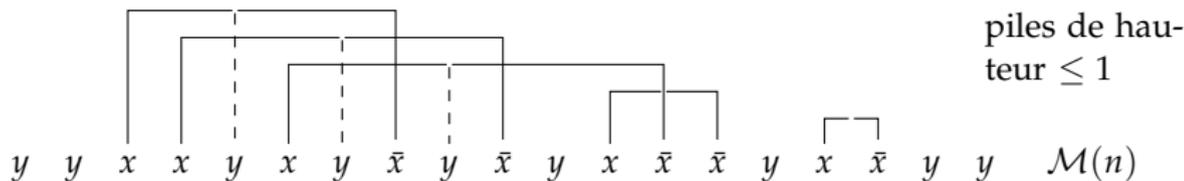
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  $\mathcal{T}_3(n)$   
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

1 1 1 1 2  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



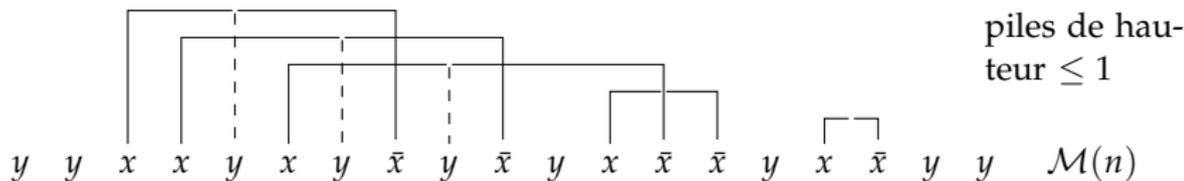
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



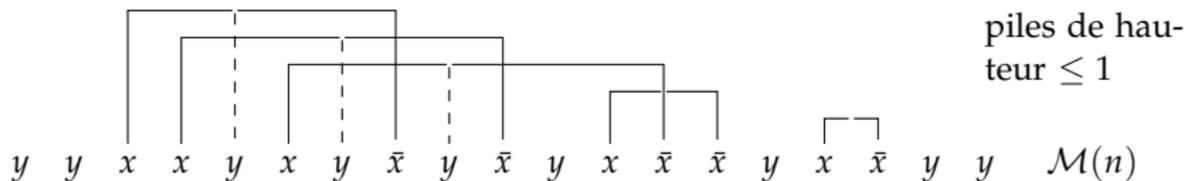
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  $\mathcal{T}_3(n)$   
 8 10 13

1 1 1 1 2 1 2  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



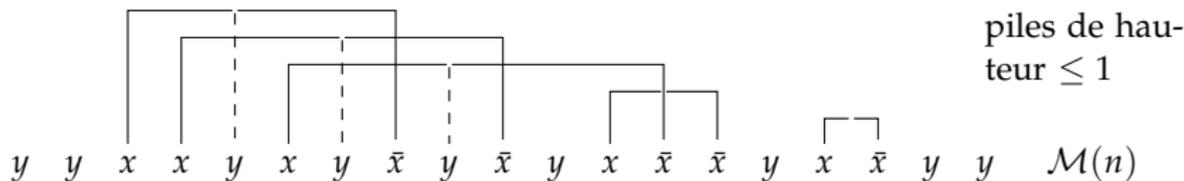
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



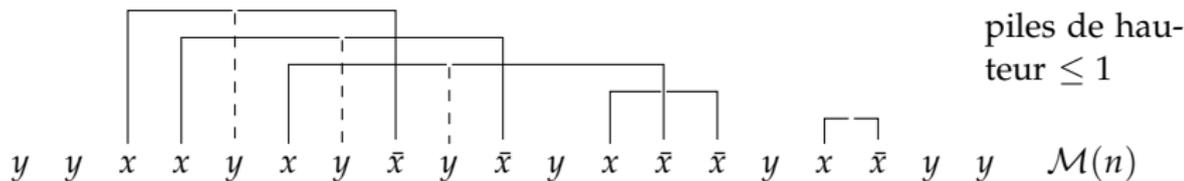
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  $\mathcal{T}_3(n)$   
 8 10 13

1 1 1 1 2 1 2 3 2  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



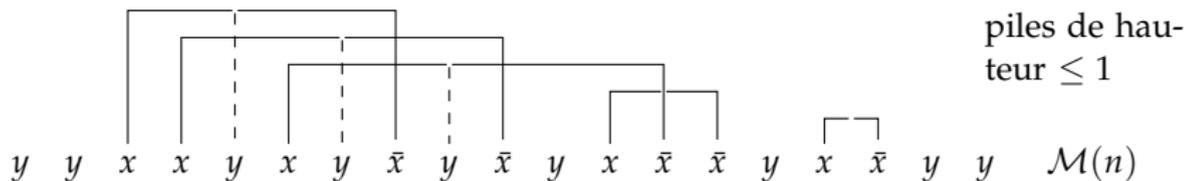
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



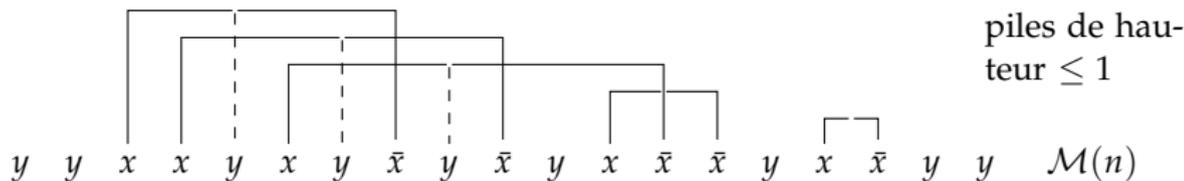
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



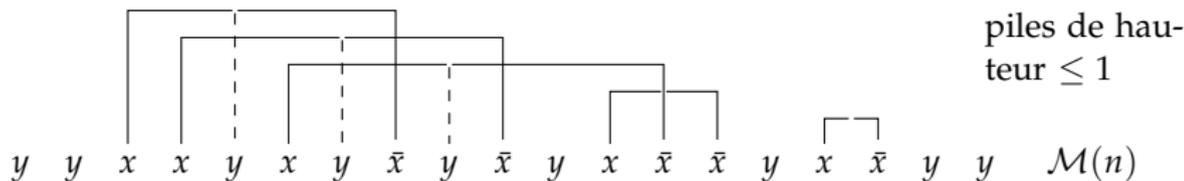
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  $\mathcal{T}_3(n)$   
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



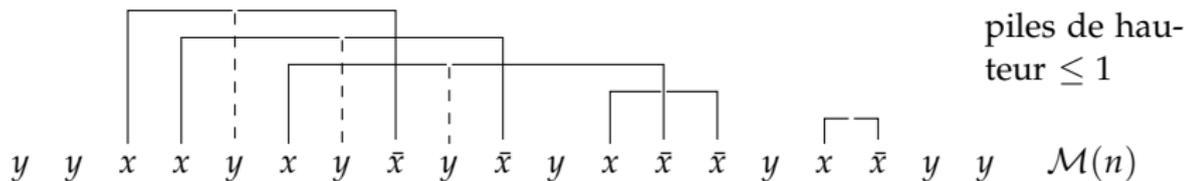
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$   
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  $\mathcal{T}_3(n)$   
 5 7 9 14 17  
 8 10 13

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



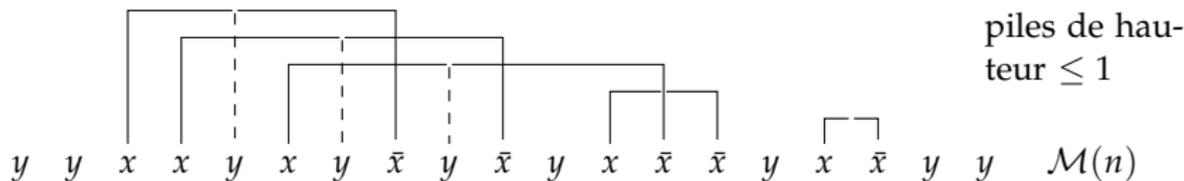
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



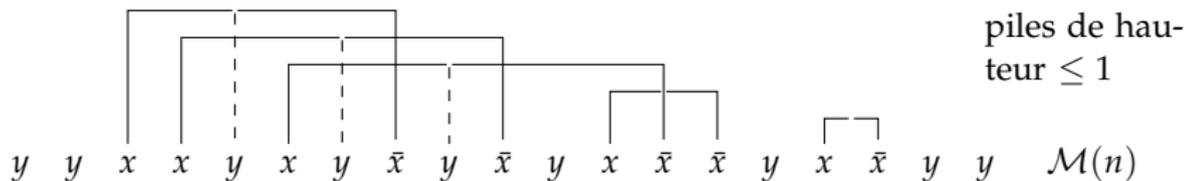
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

← ← ↑ ↑ ← ↑ ← ↘ ← ↘ ← ↑ ↘ ↘ ← ↑ ↘ ← ←  $\mathcal{H}(n,*)$



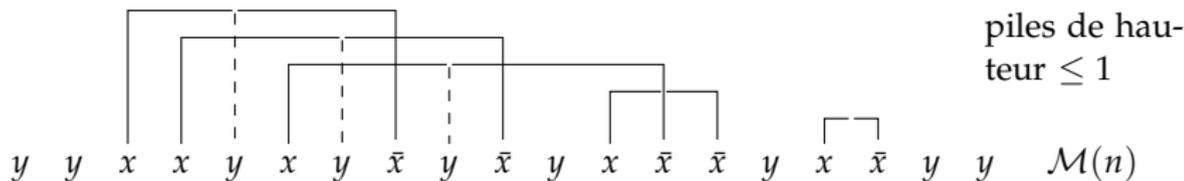
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



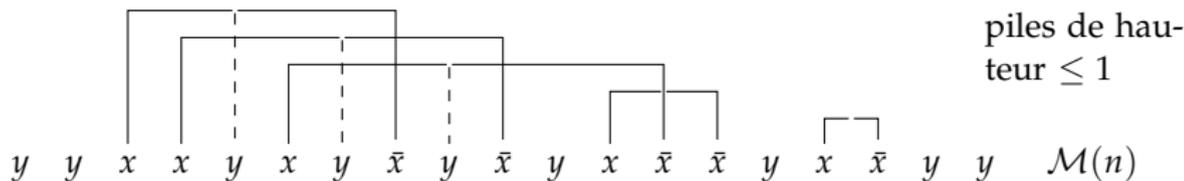
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1 1 2  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



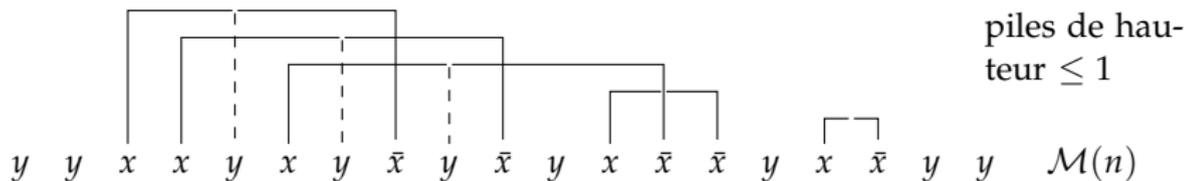
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1 1 2 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



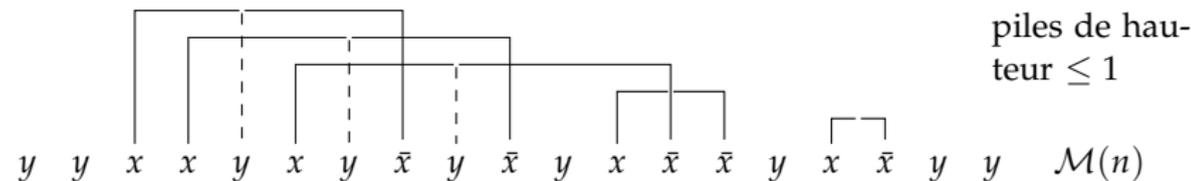
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1 1 2 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple

$\leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \searrow \leftarrow \uparrow \searrow \leftarrow \leftarrow \mathcal{H}(n,*)$



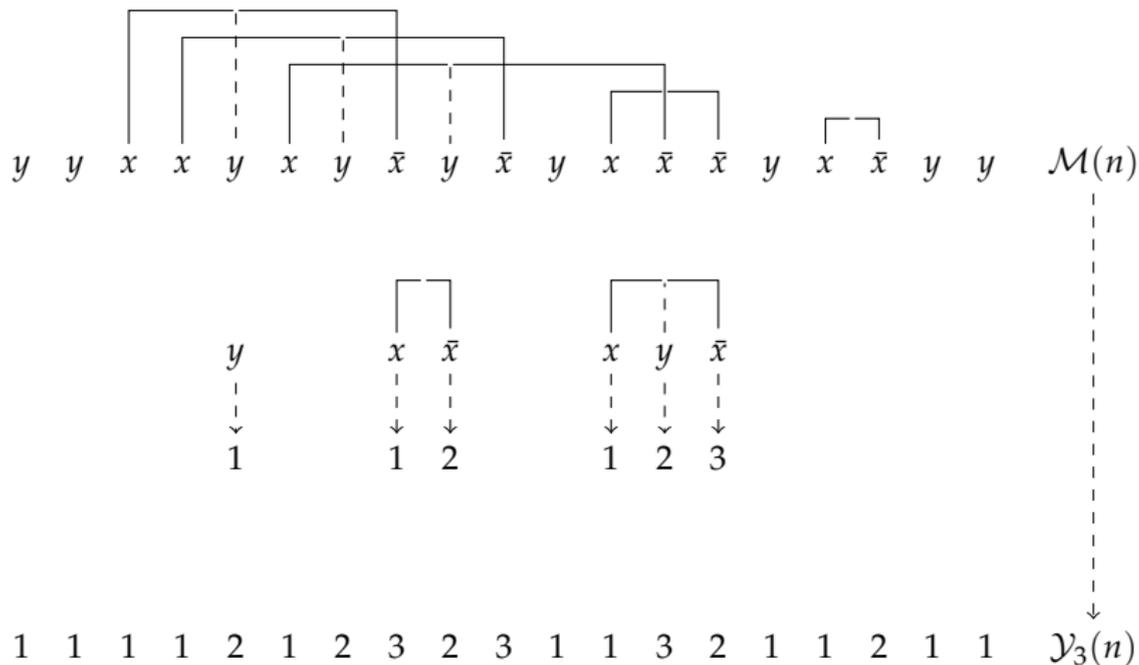
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19  
 1 2 8 10 5 13 7 3 9 4 11 14 6 12 15 17 16 18 19  $\mathcal{I}_3(n)$

1 2 3 4 6 11 12 15 16 18 19  
 5 7 9 14 17  
 8 10 13  $\mathcal{T}_3(n)$

1 1 1 1 2 1 2 3 2 3 1 1 3 2 1 1 2 1 1  $\mathcal{Y}_3(n)$

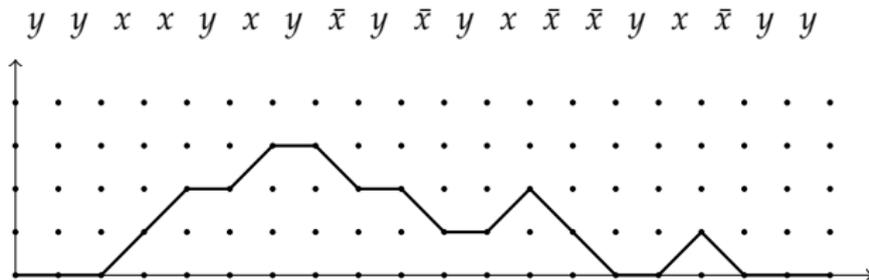
$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \searrow \uparrow \searrow \leftarrow \searrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \searrow \uparrow \uparrow \searrow \uparrow \uparrow \mathcal{Q}(n,*)$

# La composition de transformations classiques sur un exemple



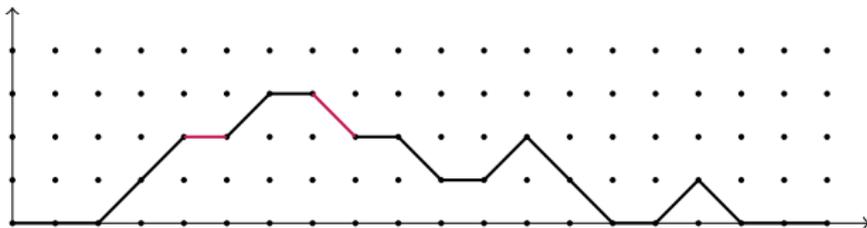
Bijection implicite dans Gouyou-Beauchamp (1989).

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs



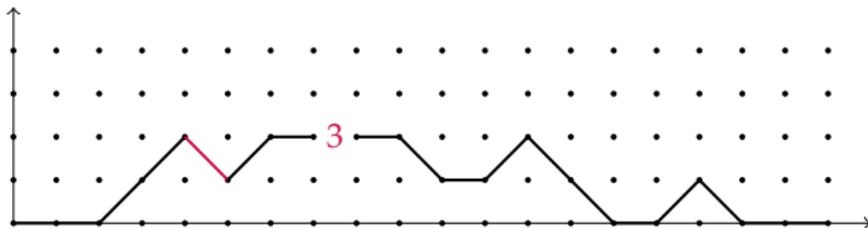
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



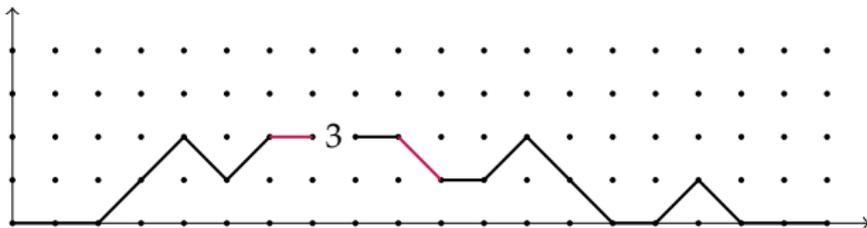
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



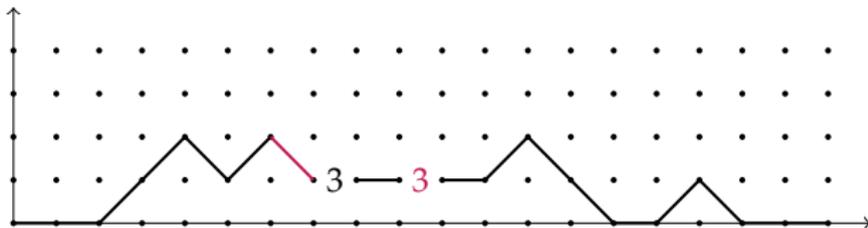
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



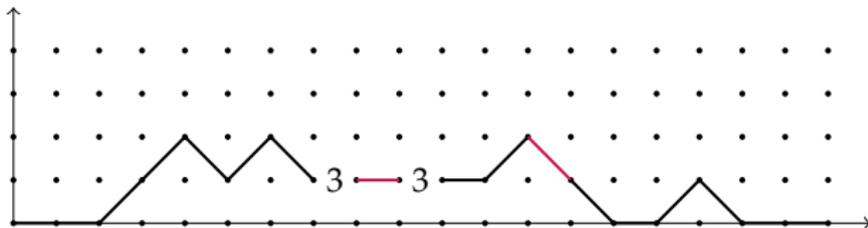
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



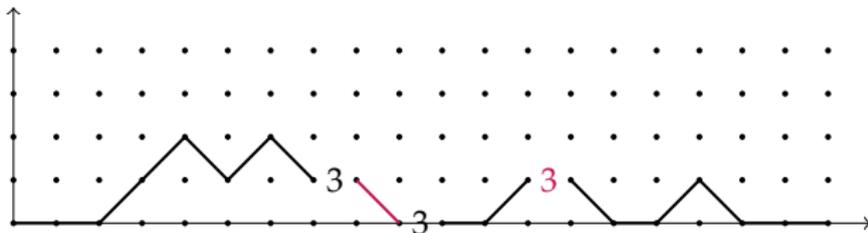
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



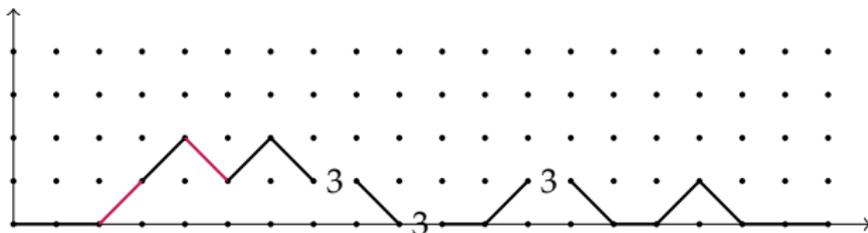
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$



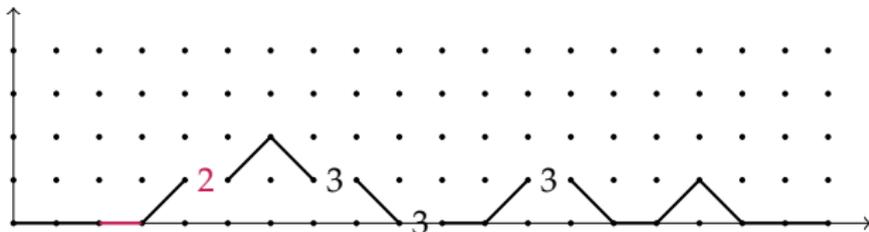
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



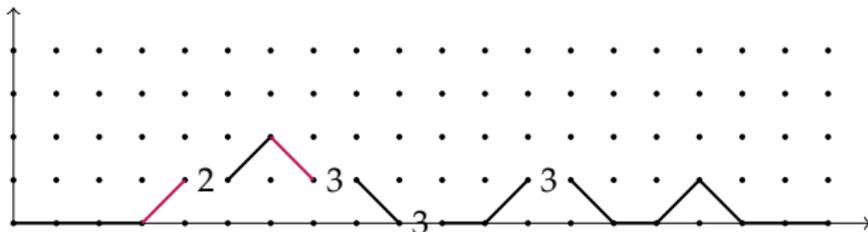
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



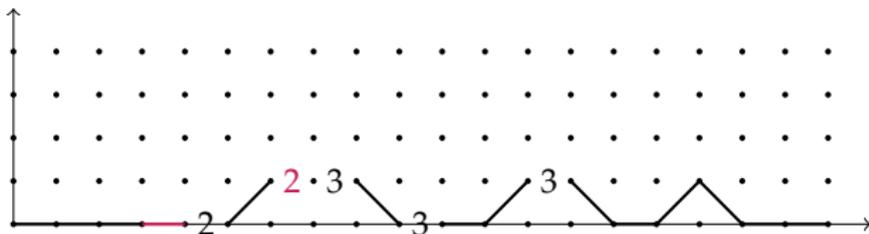
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



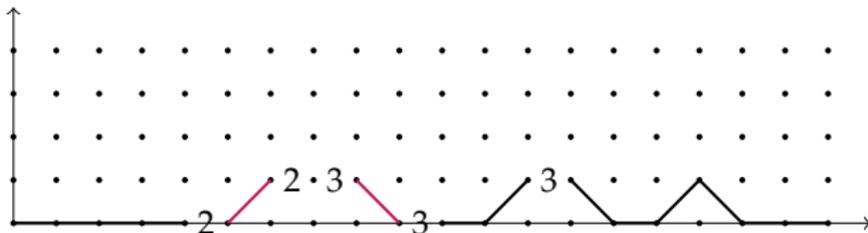
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



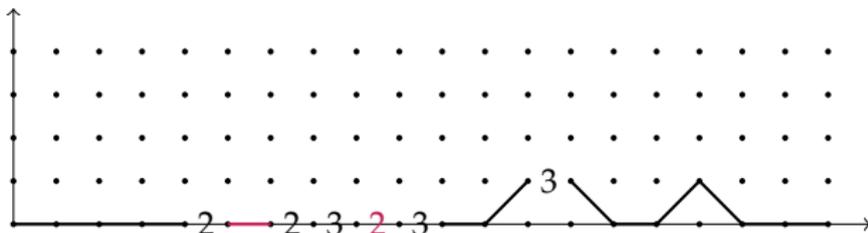
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



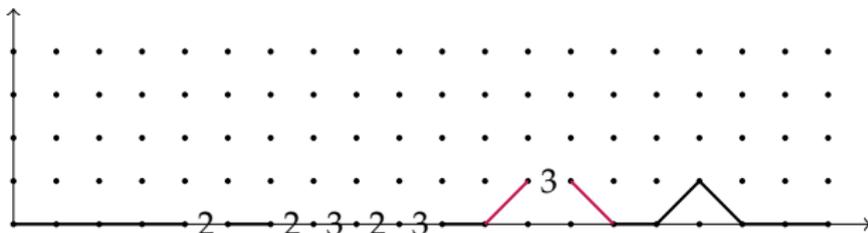
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



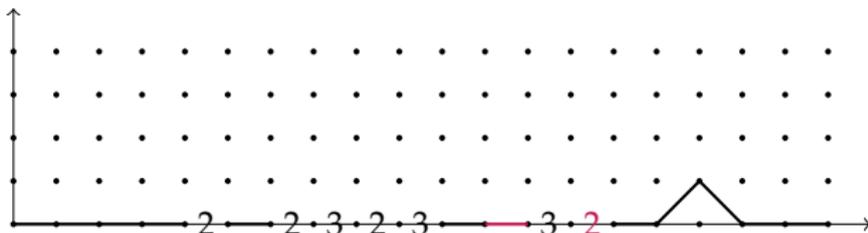
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



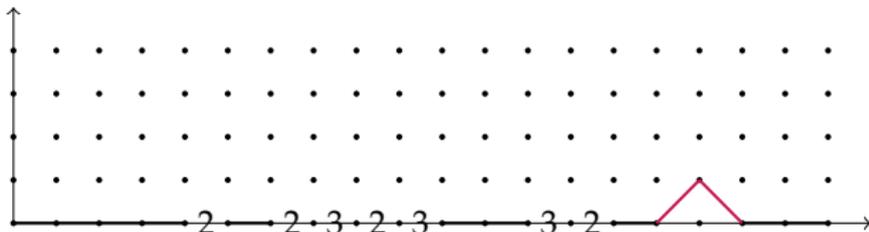
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



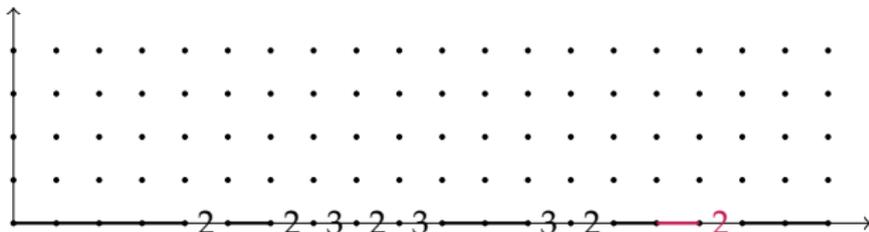
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



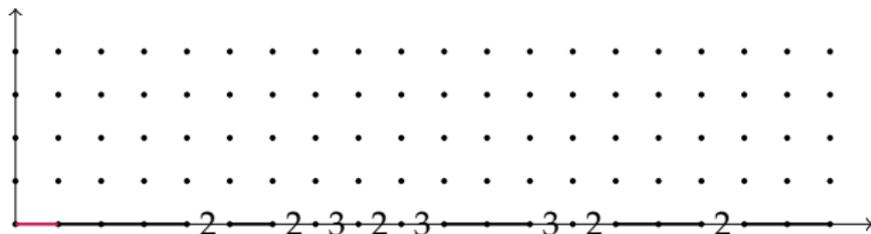
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$



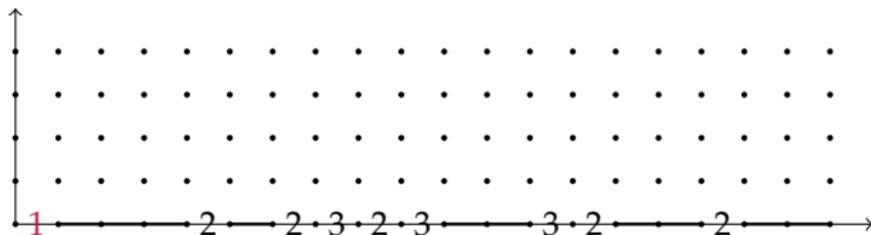
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



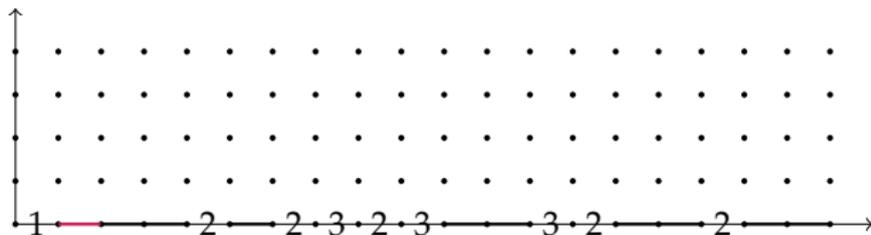
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



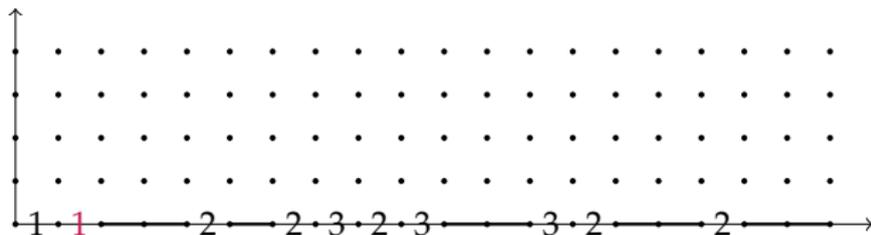
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



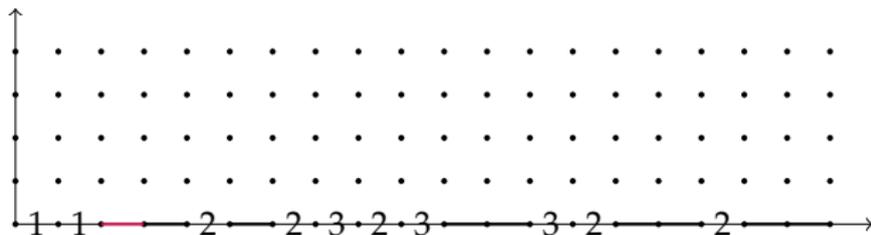
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



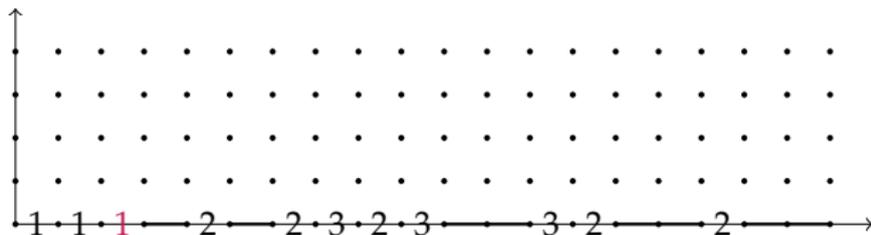
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



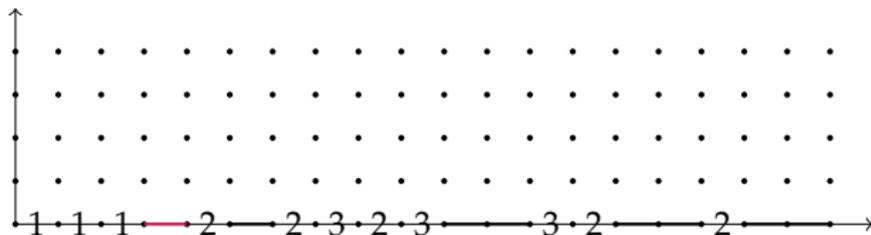
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



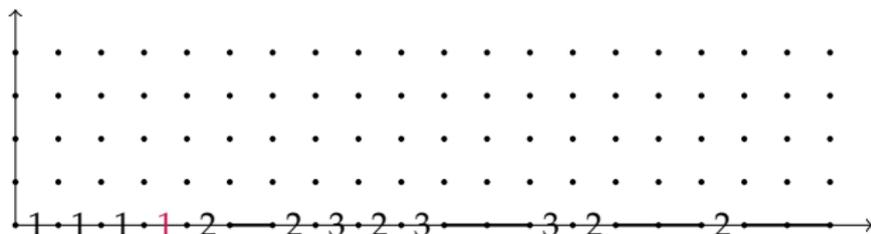
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



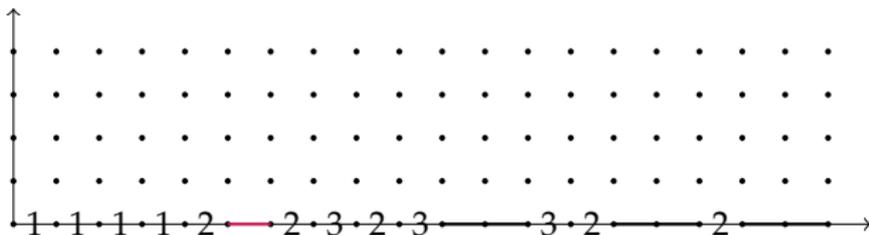
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



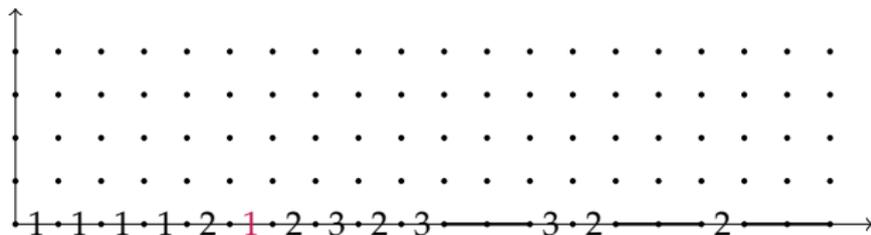
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



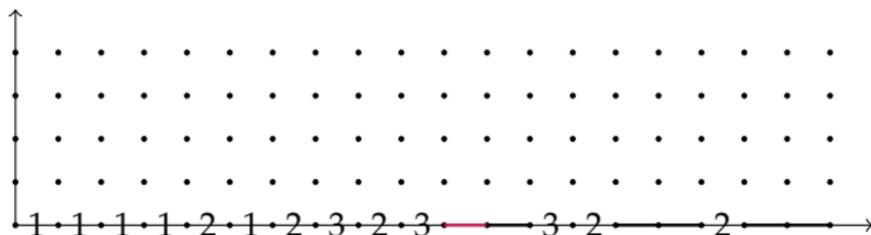
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



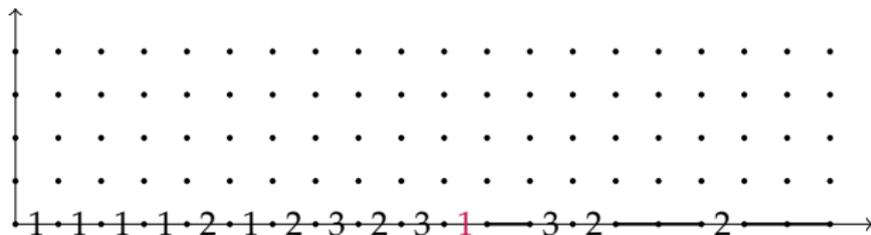
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



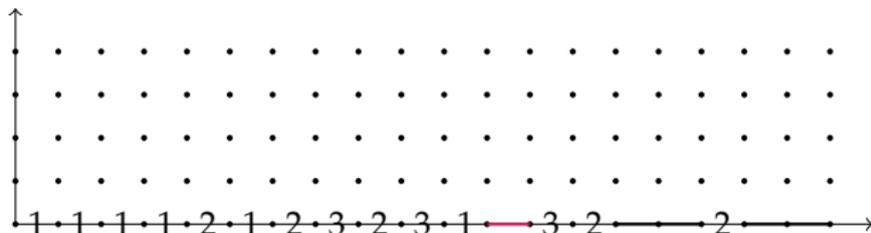
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



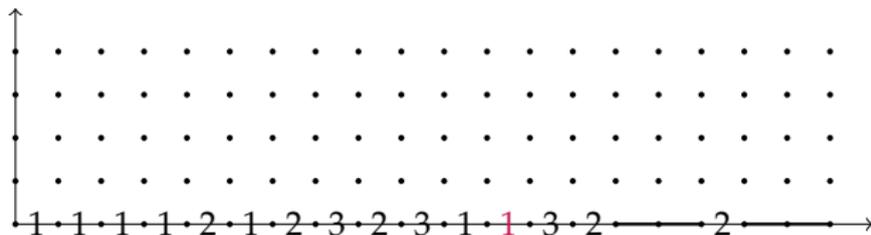
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



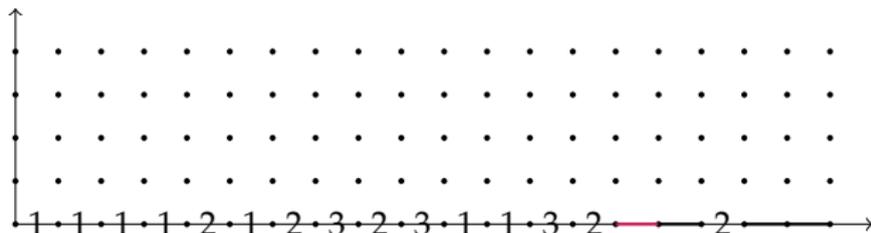
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



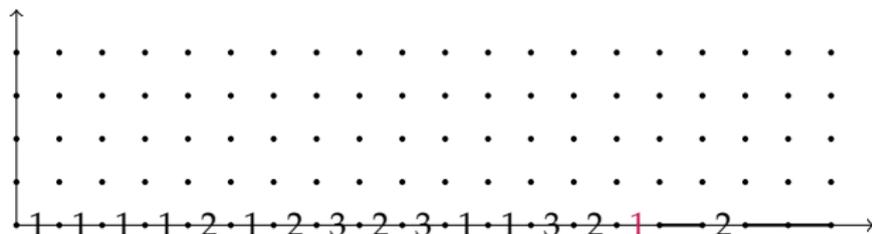
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



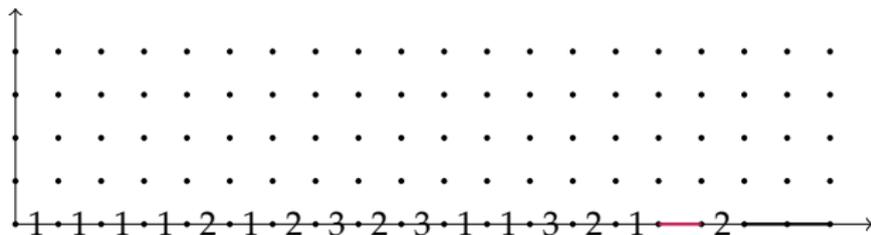
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



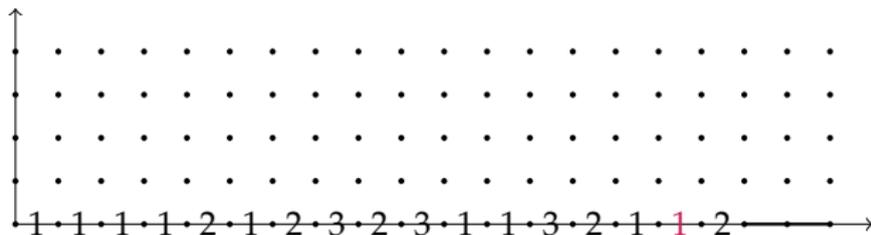
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



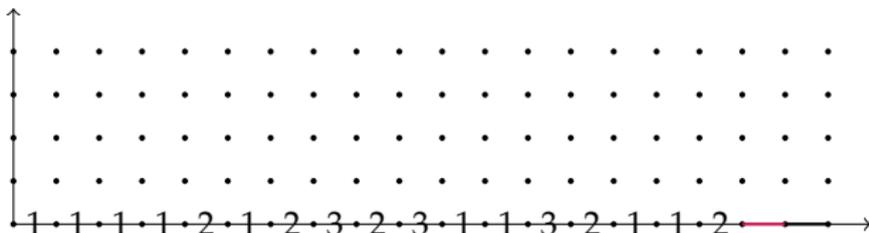
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



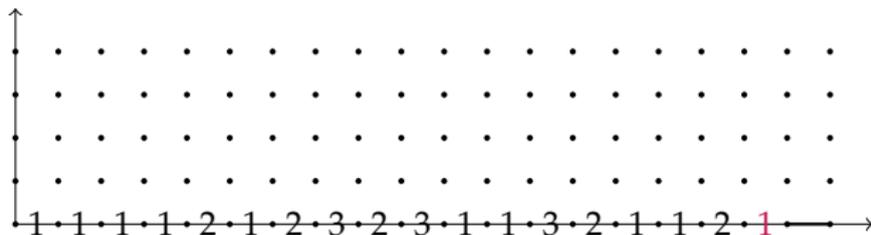
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



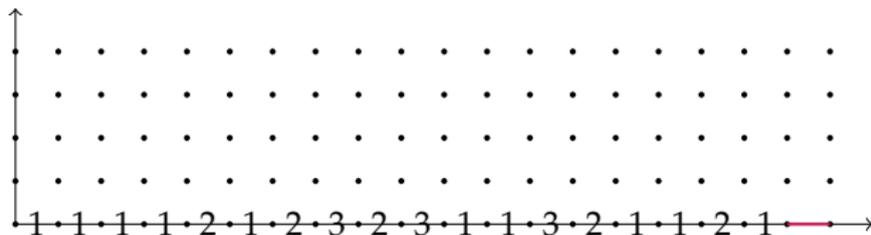
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



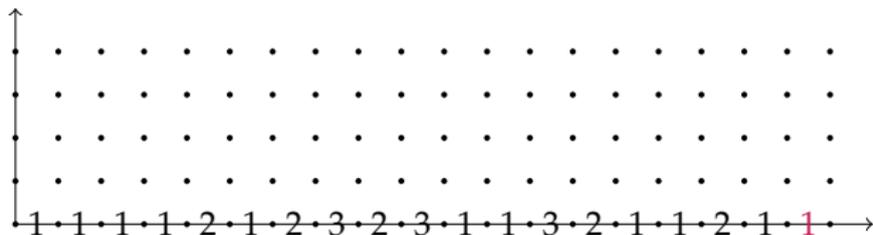
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



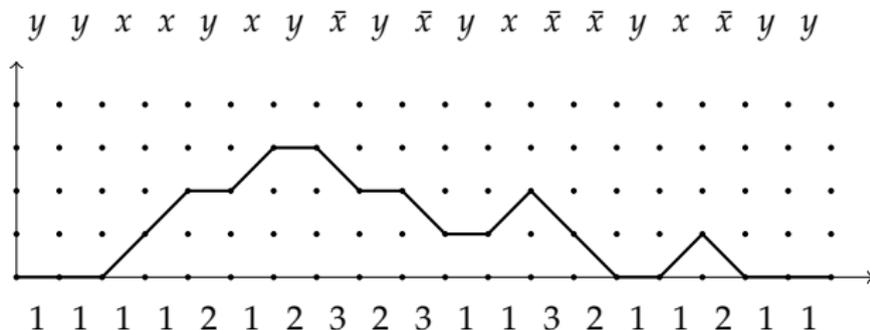
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



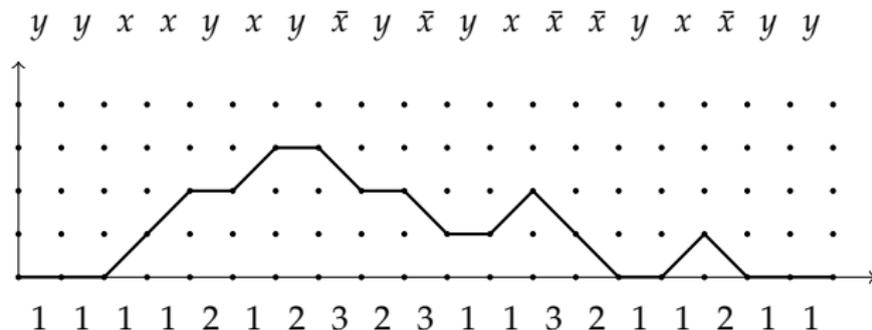
Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs

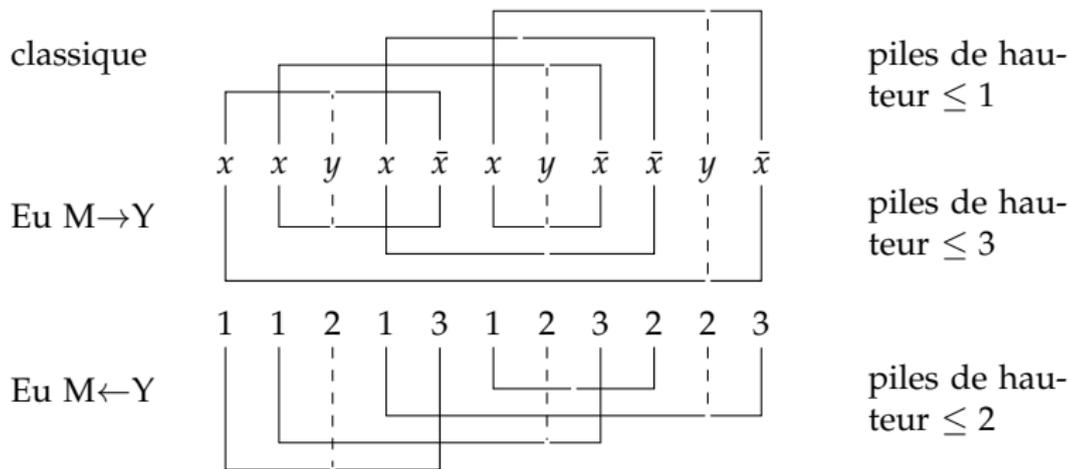
- ① de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  d'altitude  $> 0$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(y, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}, 3)$
- ② de gauche à droite, traitement de chaque pas  $x$  en l'appariant au premier pas  $\bar{x}$  qui le suit selon :  $(x, \bar{x}) \rightarrow (y, 2)$
- ③ de gauche à droite, traitement de chaque pas  $y$  selon :  $y \rightarrow 1$



Transformation Motzkin  $\leftarrow$  Yamanouchi

Par strict renversement des étapes.

- transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : recherche de motifs successifs, repose sur un autre choix d'involution
- transformation Motzkin  $\leftarrow$  Yamanouchi : description peu limpide, ne reprend pas les mêmes associations que le sens  $\rightarrow$
- preuve : par « it is easy to see », je ne sais pas dire si elle est complète



# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|      |      |          |         |            |           |            |           |
|------|------|----------|---------|------------|-----------|------------|-----------|
| $s$  |      | $x$      | $y$     | $y$        | $\bar{x}$ | $\bar{x}$  | $\bar{x}$ |
| $u$  | $u'$ | $\alpha$ | $0$     | $\alpha+1$ | $0$       | $\alpha+1$ | $\alpha$  |
| $v$  | $v'$ | $\beta$  | $\beta$ | $\beta$    | $0$       | $0$        | $\beta+1$ |
| $s'$ |      | $1$      | $1$     | $2$        | err.      | $2$        | $3$       |

$=$

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

$$\begin{array}{|c|} \hline s \\ \hline u & u' \\ v & v' \\ \hline s' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bar{x} \\ \hline 0 & - \\ 0 & - \\ \hline \text{err.} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bar{x} \\ \hline \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bar{x} \\ \hline \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$y \ y \ x \ x \ y \ x \ y \ \bar{x} \ y \ \bar{x} \ y \ x \ \bar{x} \ \bar{x} \ y \ x \ \bar{x} \ y \ y$

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① **initialiser** deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

y y x x y x y  $\bar{x}$  y  $\bar{x}$  y x  $\bar{x}$   $\bar{x}$  y x  $\bar{x}$  y y

0  
0

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

$y \quad y \quad x \quad x \quad y \quad x \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad y \quad y$

$\begin{array}{l} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 1 \end{array}$

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

$y \quad y \quad x \quad x \quad y \quad x \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad y \quad y$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 1   | 2   |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 1   |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2   |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 1         | 0   |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2   | 1         | 2   |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3   | 2         |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         | 0 | 0         |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         | 2 | 1         |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2         | 3 |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         | 0 | 0         | 0 | 0 | 0         | 0         | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         | 2 | 1         | 1 | 1 | 1         | 1         | 1 | 1 | 1         | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2         | 3 | 1         |   |   |           |           |   |   |           |   |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         | 0 | 0         | 0 | 1 | 1         | 0         | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         | 2 | 1         | 1 | 1 | 1         | 0         | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2         | 3 | 1         | 1 | 1 | 1         | 0         | 0 | 0 | 0         | 0 | 0 |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         | 0 | 0         | 0 | 1 | 1         |           |   |   |           |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         | 2 | 1         | 1 | 1 | 1         |           |   |   |           |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2         | 3 | 1         | 1 | 3 |           |           |   |   |           |   |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 1         | 0   | 0         | 0   | 1   | 1         | 0         |     |     |           |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2   | 1         | 2   | 1         | 1   | 1   | 0         | 0         |     |     |           |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3   | 2         | 3   | 1         | 1   | 3   | 2         |           |     |     |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1         | 0 | 0         | 0 | 1 | 1         | 0         | 0 |   |           |   |   |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1         | 2 | 1         | 1 | 1 | 0         | 0         | 0 |   |           |   |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2         | 3 | 1         | 1 | 3 | 2         | 1         |   |   |           |   |   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|

|     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0   | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1         | 1   | 0         | 0   | 0   | 1         | 1         | 0   | 0   | 1         | 0   | 1   |
| 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2         | 1   | 2         | 1   | 1   | 1         | 0         | 0   | 0   | 0         | 0   | 0   |
| 1   | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3         | 2   | 3         | 1   | 1   | 3         | 2         | 1   | 1   | 1         | 1   | 1   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
|   | $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0 | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1   | 1         | 0   | 0         | 0   | 1   | 1         | 0         | 0   | 1   | 0         |     |     |
| 0 | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2   | 1         | 2   | 1         | 1   | 1   | 0         | 0         | 0   | 0   | 0         |     |     |
| 1 | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3   | 2         | 3   | 1         | 1   | 3   | 2         | 1         | 1   | 2   |           |     |     |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'**unique règle qui s'applique**

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

|     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |
| 0   | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1         | 1   | 0         | 0   | 0   | 1         | 1         | 0   | 0   | 1         | 0   | 0   |
| 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2         | 1   | 2         | 1   | 1   | 1         | 0         | 0   | 0   | 0         | 0   | 0   |
| 1   | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3         | 2   | 3         | 1   | 1   | 3         | 2         | 1   | 1   | 2         | 1   | 1   |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

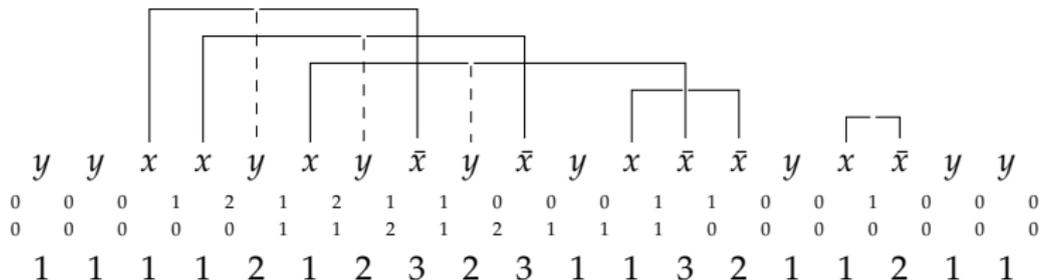
|     |     |     |     |     |     |     |           |     |           |     |     |           |           |     |     |           |     |     |   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|---|
| $y$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $y$ | $x$ | $\bar{x}$ | $y$ | $y$ |   |
| 0   | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 2   | 1         | 1   | 0         | 0   | 0   | 1         | 1         | 0   | 0   | 1         | 0   | 0   | 0 |
| 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 2         | 1   | 2         | 1   | 1   | 1         | 0         | 0   | 0   | 0         | 0   | 0   | 0 |
| 1   | 1   | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3         | 2   | 3         | 1   | 1   | 3         | 2         | 1   | 1   | 2         | 1   | 1   | 1 |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|      |      |          |            |         |         |            |           |           |     |            |          |           |
|------|------|----------|------------|---------|---------|------------|-----------|-----------|-----|------------|----------|-----------|
| $s$  |      | $x$      |            | $y$     |         | $y$        |           | $\bar{x}$ |     | $\bar{x}$  |          | $\bar{x}$ |
| $u$  | $u'$ | $\alpha$ | $\alpha+1$ | $0$     | $0$     | $\alpha+1$ | $\alpha$  | $0$       | $-$ | $\alpha+1$ | $\alpha$ | $\alpha$  |
| $v$  | $v'$ | $\beta$  | $\beta$    | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$    | $\beta+1$ | $0$       | $-$ | $0$        | $0$      | $\beta+1$ |
| $s'$ |      | $1$      |            | $1$     |         | $2$        |           | $err.$    |     | $2$        |          | $3$       |



# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

$y \quad y \quad x \quad x \quad y \quad x \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad \bar{x} \quad y \quad x \quad \bar{x} \quad y \quad y$   
 $0$   
 $0$

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | -         | - | -         | - | - | -         | -         | - | - | -         | - | - |

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

|   |   |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----------|---|---|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|
|   | y | y | x | x | y | x | y | $\bar{x}$ | y | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | y | x | $\bar{x}$ | y | y |
| 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |
| 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |           |   |           |   |   |           |           |   |   |           |   |   |

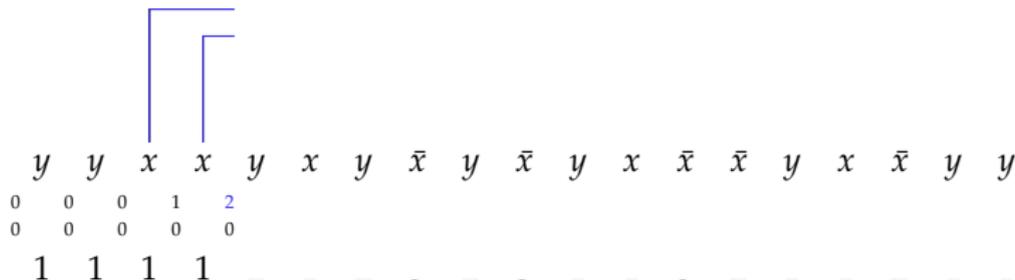


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|

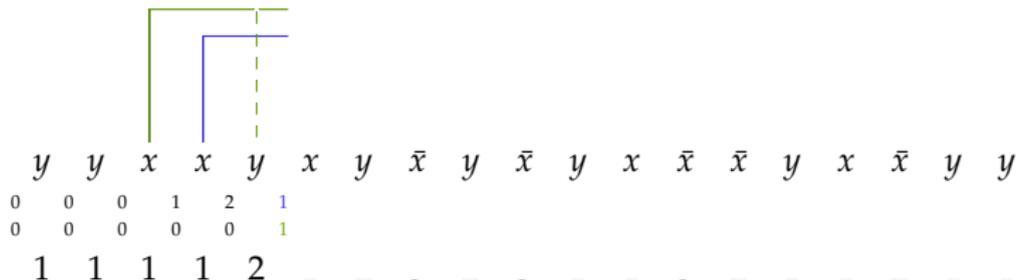


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|

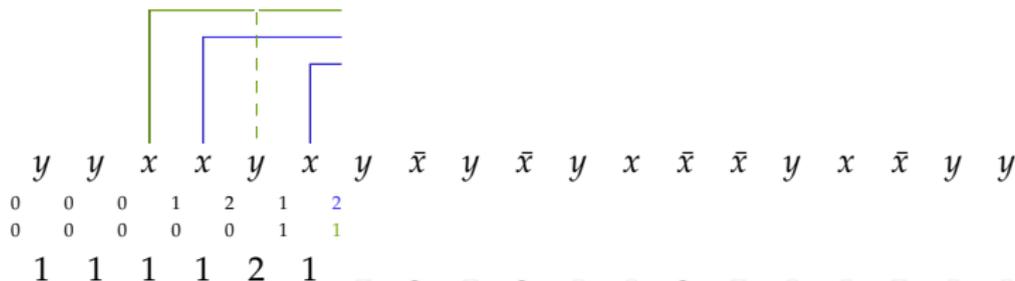


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|          |   |                     |                 |                     |           |                     |                   |
|----------|---|---------------------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $s$      |   | $x$                 | $y$             | $y$                 | $\bar{x}$ | $\bar{x}$           | $\bar{x}$         |
| $u$ $u'$ | = | $\alpha$ $\alpha+1$ | $0$ $0$         | $\alpha+1$ $\alpha$ | $0$ $-$   | $\alpha+1$ $\alpha$ | $\alpha$ $\alpha$ |
| $v$ $v'$ |   | $\beta$ $\beta$     | $\beta$ $\beta$ | $\beta$ $\beta+1$   | $0$ $-$   | $0$ $0$             | $\beta+1$ $\beta$ |
| $s'$     |   | 1                   | 1               | 2                   | err.      | 2                   | 3                 |

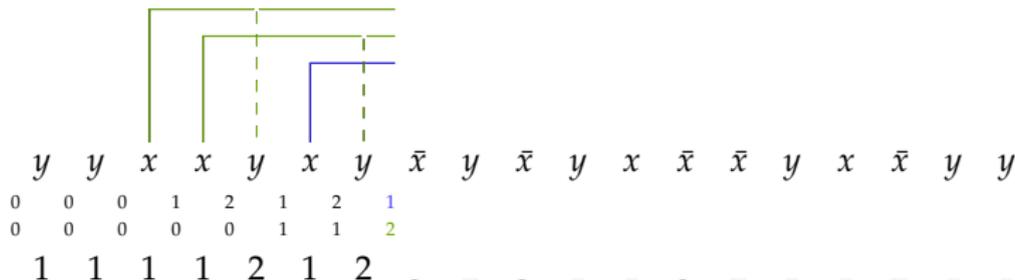


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array}$ | , | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|

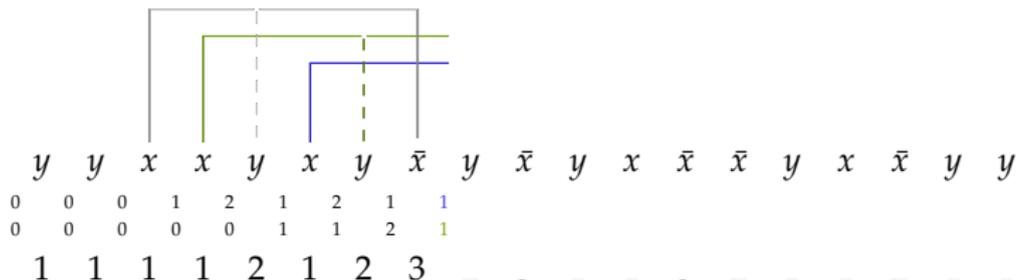


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|          |   |                     |                 |                     |           |                     |                   |
|----------|---|---------------------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $s$      |   | $x$                 | $y$             | $y$                 | $\bar{x}$ | $\bar{x}$           | $\bar{x}$         |
| $u$ $u'$ | = | $\alpha$ $\alpha+1$ | $0$ $0$         | $\alpha+1$ $\alpha$ | $0$ $-$   | $\alpha+1$ $\alpha$ | $\alpha$ $\alpha$ |
| $v$ $v'$ |   | $\beta$ $\beta$     | $\beta$ $\beta$ | $\beta$ $\beta+1$   | $0$ $-$   | $0$ $0$             | $\beta+1$ $\beta$ |
| $s'$     |   | 1                   | 1               | 2                   | err.      | 2                   | 3                 |

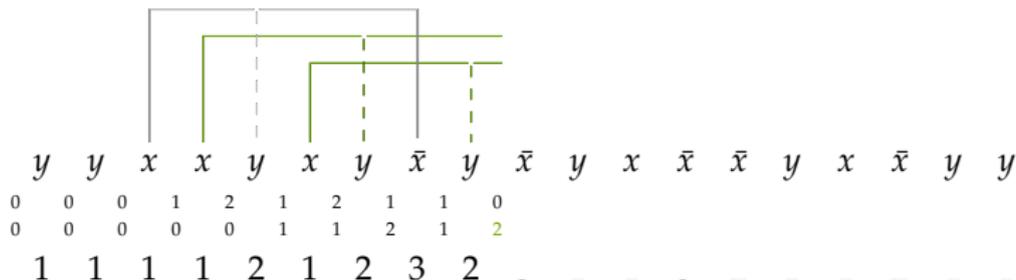


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|

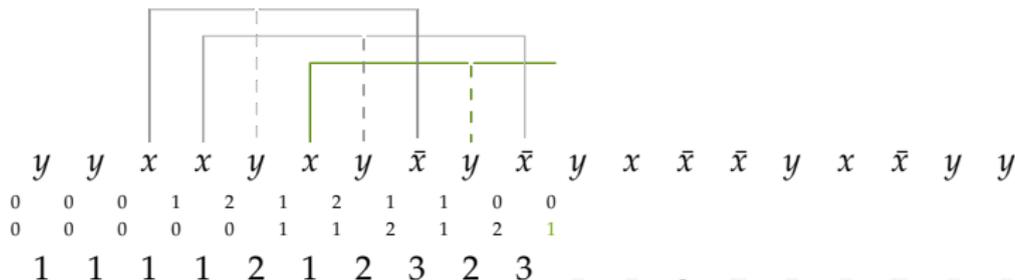


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

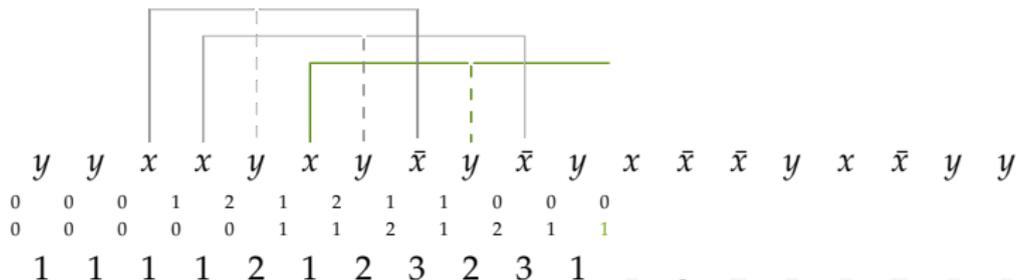


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

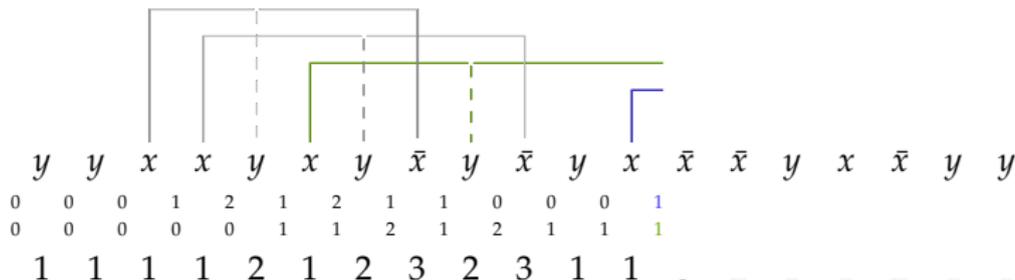


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|          |   |                     |                 |                     |           |                     |                   |
|----------|---|---------------------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $s$      |   | $x$                 | $y$             | $y$                 | $\bar{x}$ | $\bar{x}$           | $\bar{x}$         |
| $u$ $u'$ | = | $\alpha$ $\alpha+1$ | $0$ $0$         | $\alpha+1$ $\alpha$ | $0$ $-$   | $\alpha+1$ $\alpha$ | $\alpha$ $\alpha$ |
| $v$ $v'$ |   | $\beta$ $\beta$     | $\beta$ $\beta$ | $\beta$ $\beta+1$   | $0$ $-$   | $0$ $0$             | $\beta+1$ $\beta$ |
| $s'$     |   | 1                   | 1               | 2                   | err.      | 2                   | 3                 |

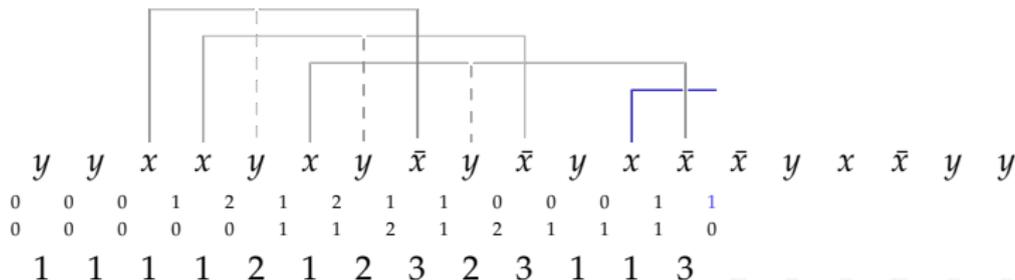


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

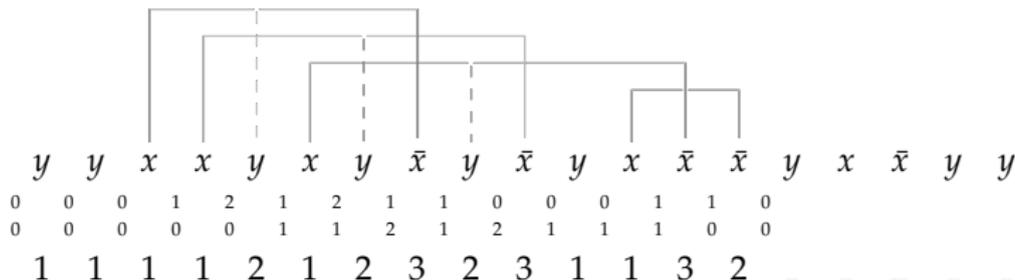


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|      |      |          |            |         |         |            |           |           |     |            |          |           |
|------|------|----------|------------|---------|---------|------------|-----------|-----------|-----|------------|----------|-----------|
| $s$  |      | $x$      |            | $y$     |         | $y$        |           | $\bar{x}$ |     | $\bar{x}$  |          | $\bar{x}$ |
| $u$  | $u'$ | $\alpha$ | $\alpha+1$ | $0$     | $0$     | $\alpha+1$ | $\alpha$  | $0$       | $-$ | $\alpha+1$ | $\alpha$ | $\alpha$  |
| $v$  | $v'$ | $\beta$  | $\beta$    | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$    | $\beta+1$ | $0$       | $-$ | $0$        | $0$      | $\beta+1$ |
| $s'$ |      | $1$      |            | $1$     |         | $2$        |           | $err.$    |     | $2$        |          | $3$       |

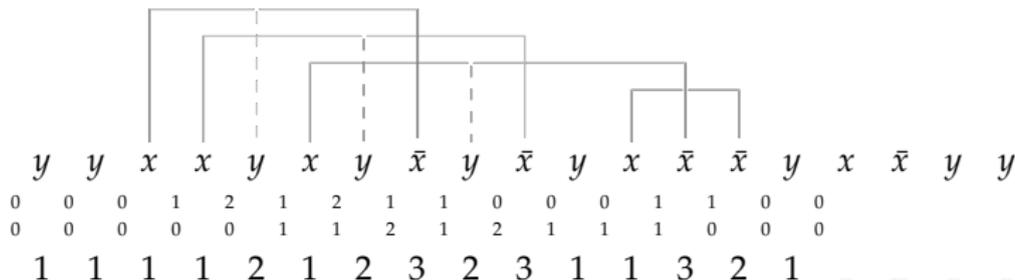


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $\begin{array}{cc} s & \\ u & u' \\ v & v' \\ s' & \end{array}$ | = | $\begin{array}{cc} x & \\ \alpha & \alpha+1 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ 1 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} y & \\ \alpha+1 & \alpha \\ \beta & \beta+1 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ 0 & - \\ 0 & - \\ \text{err.} & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 2 & \end{array},$ | $\begin{array}{cc} \bar{x} & \\ \alpha & \alpha \\ \beta+1 & \beta \\ 3 & \end{array}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

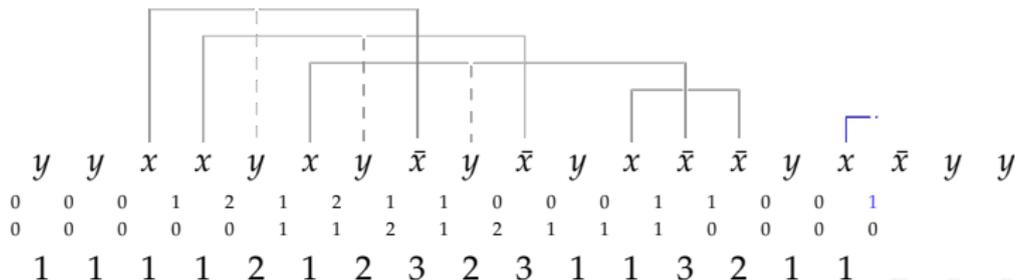


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|          |   |                     |                 |                     |           |                     |                   |
|----------|---|---------------------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $s$      |   | $x$                 | $y$             | $y$                 | $\bar{x}$ | $\bar{x}$           | $\bar{x}$         |
| $u$ $u'$ | = | $\alpha$ $\alpha+1$ | $0$ $0$         | $\alpha+1$ $\alpha$ | $0$ $-$   | $\alpha+1$ $\alpha$ | $\alpha$ $\alpha$ |
| $v$ $v'$ |   | $\beta$ $\beta$     | $\beta$ $\beta$ | $\beta$ $\beta+1$   | $0$ $-$   | $0$ $0$             | $\beta+1$ $\beta$ |
| $s'$     |   | 1                   | 1               | 2                   | err.      | 2                   | 3                 |

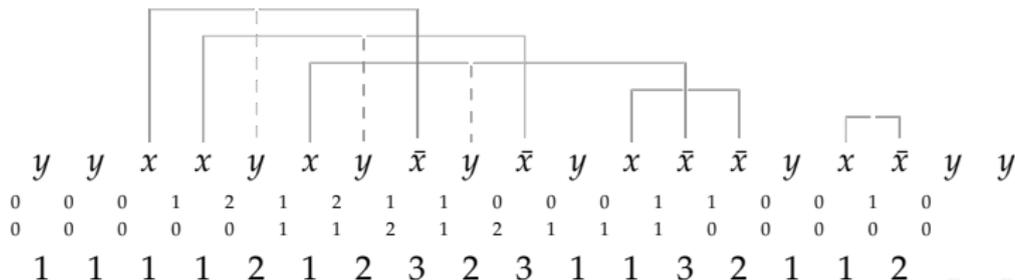


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|      |      |          |            |         |         |            |           |           |     |            |          |           |
|------|------|----------|------------|---------|---------|------------|-----------|-----------|-----|------------|----------|-----------|
| $s$  |      | $x$      |            | $y$     |         | $y$        |           | $\bar{x}$ |     | $\bar{x}$  |          | $\bar{x}$ |
| $u$  | $u'$ | $\alpha$ | $\alpha+1$ | $0$     | $0$     | $\alpha+1$ | $\alpha$  | $0$       | $-$ | $\alpha+1$ | $\alpha$ | $\alpha$  |
| $v$  | $v'$ | $\beta$  | $\beta$    | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$    | $\beta+1$ | $0$       | $-$ | $0$        | $0$      | $\beta+1$ |
| $s'$ |      | $1$      |            | $1$     |         | $2$        |           | $err.$    |     | $2$        |          | $3$       |

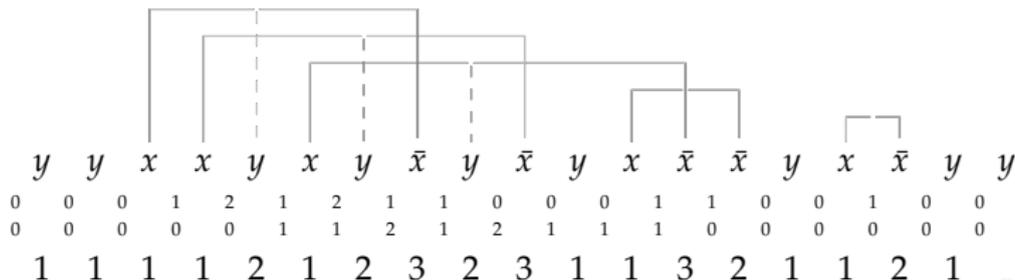


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|      |      |          |            |         |         |            |           |           |     |            |          |           |
|------|------|----------|------------|---------|---------|------------|-----------|-----------|-----|------------|----------|-----------|
| $s$  |      | $x$      |            | $y$     |         | $y$        |           | $\bar{x}$ |     | $\bar{x}$  |          | $\bar{x}$ |
| $u$  | $u'$ | $\alpha$ | $\alpha+1$ | $0$     | $0$     | $\alpha+1$ | $\alpha$  | $0$       | $-$ | $\alpha+1$ | $\alpha$ | $\alpha$  |
| $v$  | $v'$ | $\beta$  | $\beta$    | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$    | $\beta+1$ | $0$       | $-$ | $0$        | $0$      | $\beta+1$ |
| $s'$ |      | $1$      |            | $1$     |         | $2$        |           | $err.$    |     | $2$        |          | $3$       |

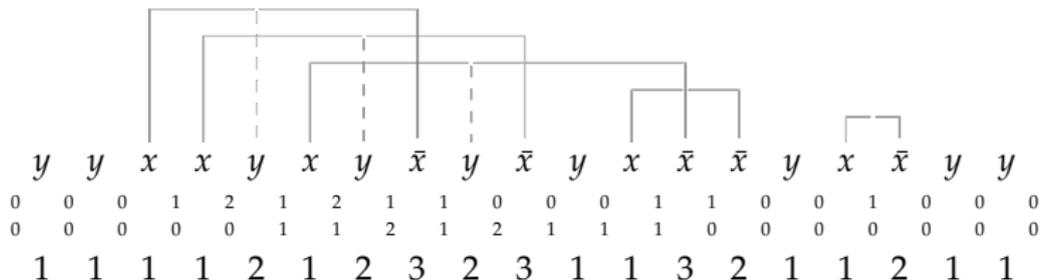


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|

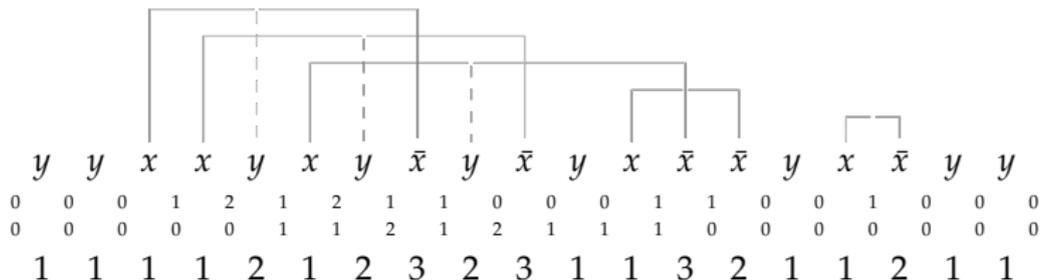


# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|   |   |  |   |  |   |  |   |   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|
| $s$<br>$u \quad u'$<br>$v \quad v'$<br>$s'$ | = | $x$<br>$\alpha \quad \alpha+1$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$0 \quad 0$<br>$\beta \quad \beta$<br>$1$ | , | $y$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$\beta \quad \beta+1$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$0 \quad -$<br>$0 \quad -$<br>$err.$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha+1 \quad \alpha$<br>$0 \quad 0$<br>$2$ | , | $\bar{x}$<br>$\alpha \quad \alpha$<br>$\beta+1 \quad \beta$<br>$3$ |
|---|---|--|---|--|---|--|---|---|---|--|---|--|



Transformation Motzkin  $\leftarrow$  Yamanouchi :

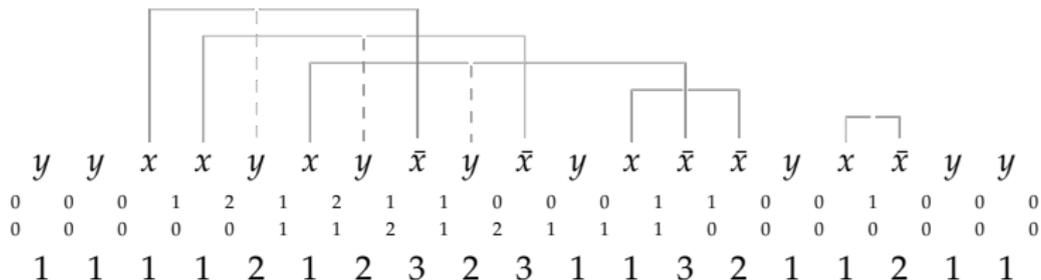
par renversement nonambigu des règles et transduction.

# Nouveau calcul par un algorithme en ligne

Transformation Motzkin  $\rightarrow$  Yamanouchi : transduction par un automate

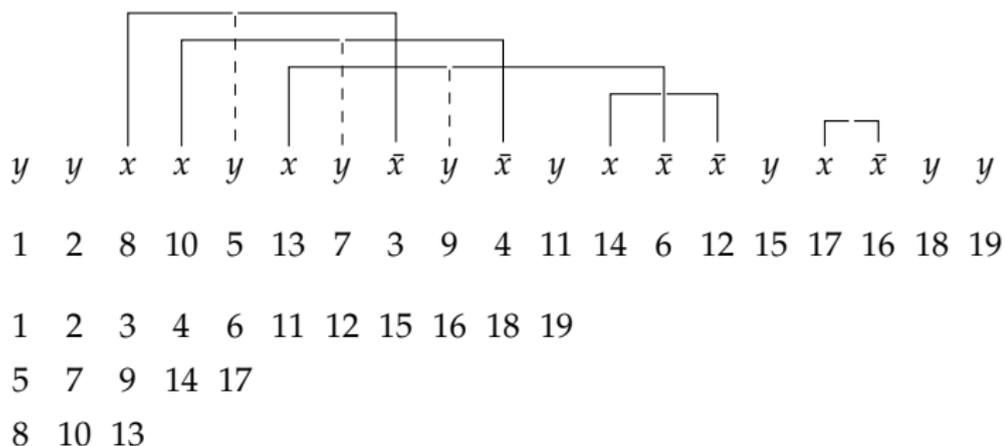
- ① initialiser deux compteurs  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \mathbb{N}$  à 0
- ② pour chaque lettre  $s \in \{x, y, \bar{x}\}$  lue à l'état  $(u, v)$ , renvoyer la lettre  $s' \in \{1, 2, 3\}$  et passer à l'état  $(u', v')$  selon l'unique règle qui s'applique

|          |   |                     |                 |                     |           |                     |                   |
|----------|---|---------------------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| $s$      |   | $x$                 | $y$             | $y$                 | $\bar{x}$ | $\bar{x}$           | $\bar{x}$         |
| $u$ $u'$ | = | $\alpha$ $\alpha+1$ | $0$ $0$         | $\alpha+1$ $\alpha$ | $0$ -     | $\alpha+1$ $\alpha$ | $\alpha$ $\alpha$ |
| $v$ $v'$ |   | $\beta$ $\beta$     | $\beta$ $\beta$ | $\beta$ $\beta+1$   | $0$ -     | $0$ $0$             | $\beta+1$ $\beta$ |
| $s'$     |   | 1                   | 1               | 2                   | err.      | 2                   | 3                 |

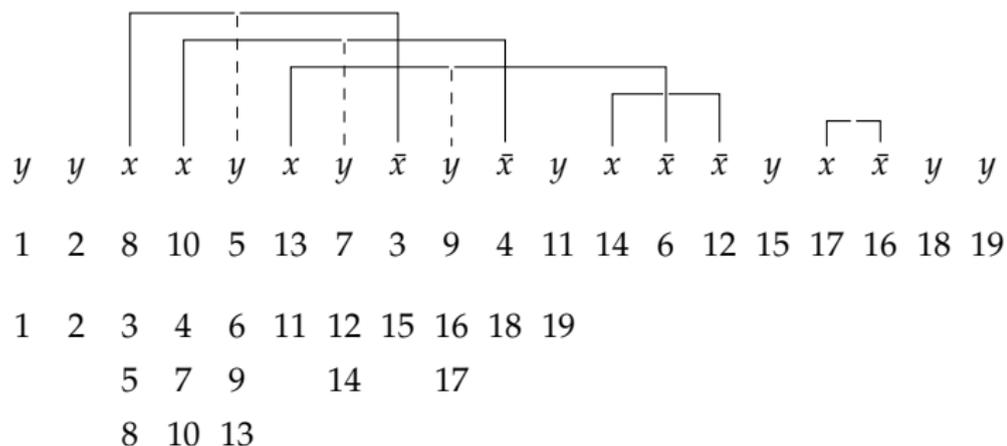


Preuves sans introduire les tableaux/involutions.

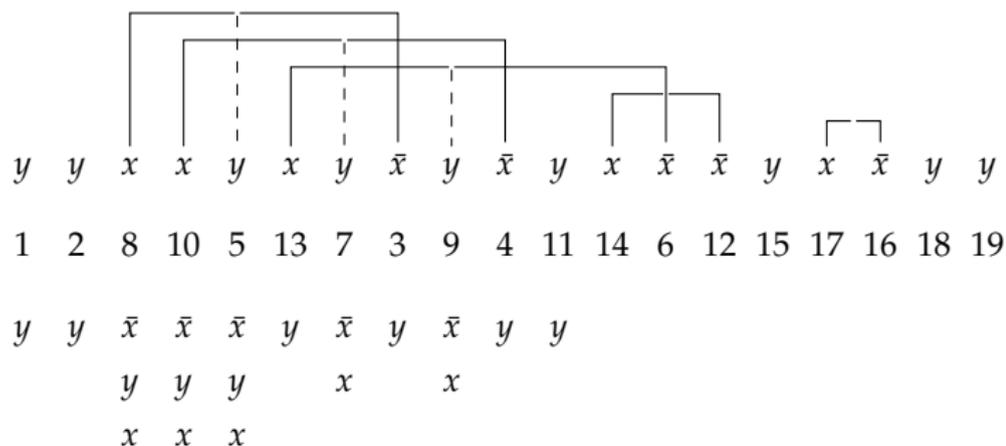
# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )



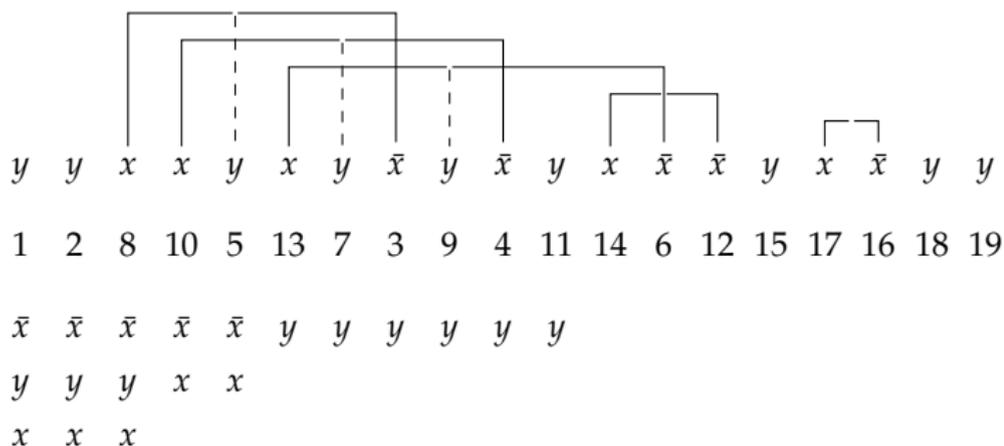
# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )



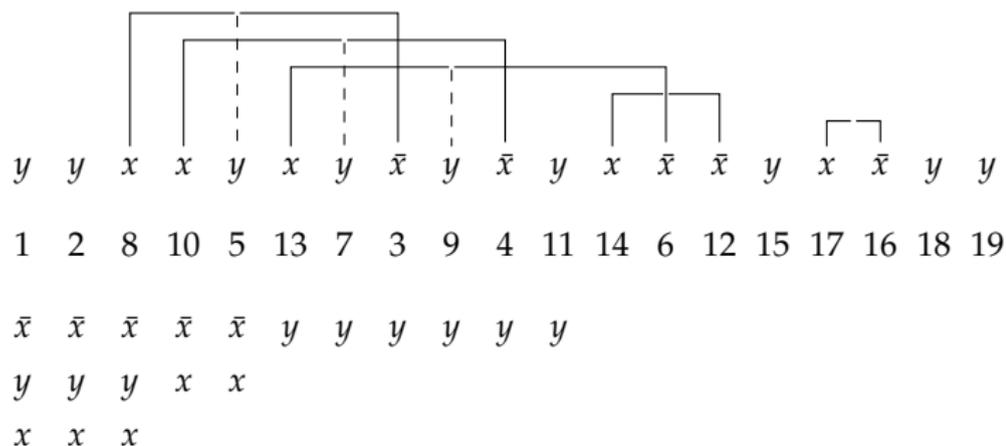
# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )



# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )



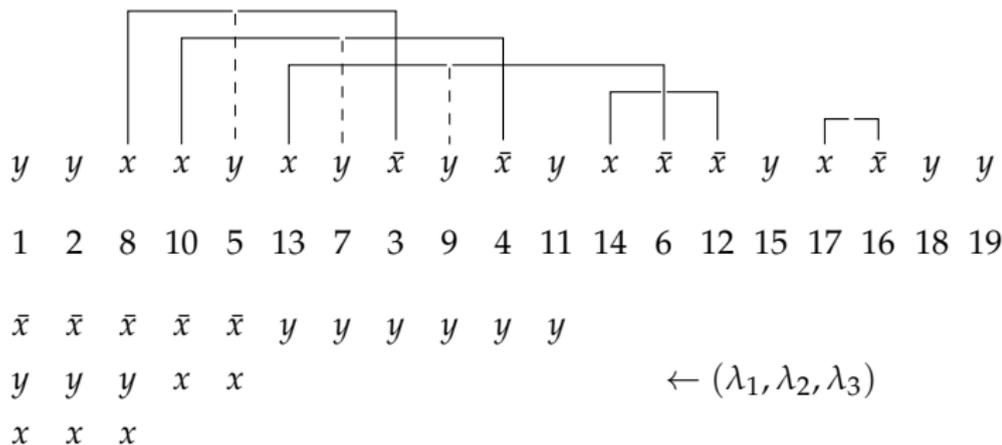
## Suivi de la position finale (paramètre $k$ )



Schützenberger (1963) : nb de points fixes = nb de col. de hauteur impaire

# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )

Mot de Motzkin :  $m$  lettres «  $x$  »,  $m$  lettres «  $\bar{x}$  »,  $(m + k)$  lettres «  $y$  »



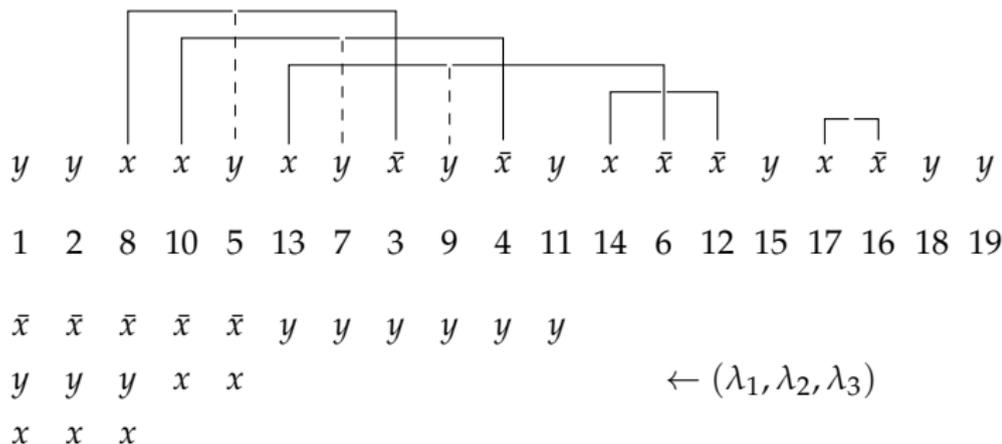
Schützenberger (1963) : nb de points fixes = nb de col. de hauteur impaire

$$n = 3m + k = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad m = \lambda_2, \quad m + k = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\lambda_1 = m + d, \quad \lambda_2 = m, \quad \lambda_3 = m - d + k.$$

# Suivi de la position finale (paramètre $k$ )

Mot de Motzkin :  $m$  lettres «  $x$  »,  $m$  lettres «  $\bar{x}$  »,  $(m + k)$  lettres «  $y$  »



Schützenberger (1963) : nb de points fixes = nb de col. de hauteur impaire

$$n = 3m + k = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad m = \lambda_2, \quad m + k = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3,$$

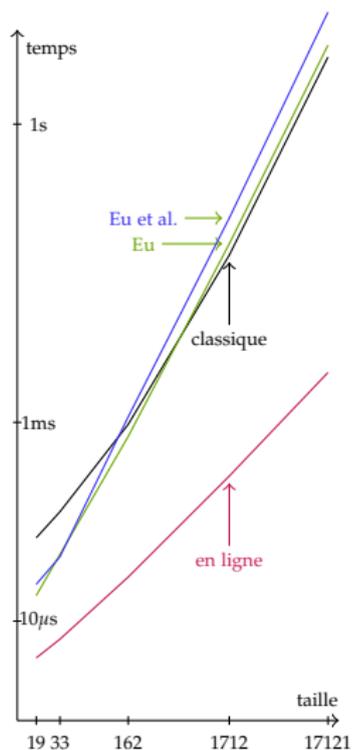
$$\lambda_1 = m + d, \quad \lambda_2 = m, \quad \lambda_3 = m - d + k.$$

Marche de  $\mathcal{H}(n, k)$  terminant en  $(-k, 0)$   $\longrightarrow$  Marche de  $\mathcal{Q}(n, k)$  terminant en  $(d, d - k)$

# Temps d'exécution

Temps de calcul (en ms) sur des mots de Motzkin aléatoires :

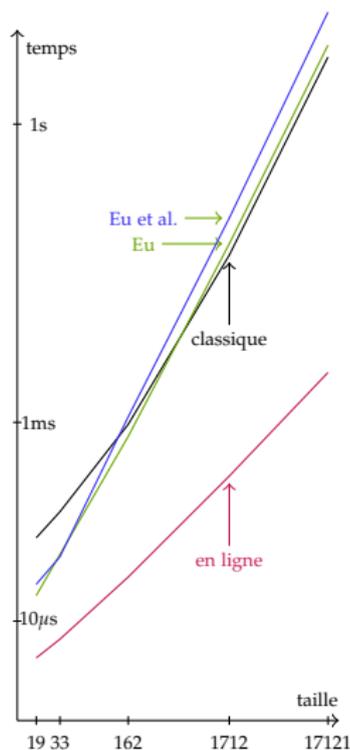
| taille    | 19  | 33  | 162  | 1712   | 17121    |
|-----------|-----|-----|------|--------|----------|
| classique | 69  | 126 | 954  | 48105  | 4736395  |
| Eu        | 18  | 47  | 721  | 62560  | 6240794  |
| Eu et al. | 24  | 44  | 1137 | 113492 | 13417099 |
| en ligne  | 4,3 | 6,6 | 28   | 288    | 3173     |



Temps de calcul (en ms) sur des mots de Motzkin aléatoires :

| taille    | 19  | 33  | 162  | 1712   | 17121    |
|-----------|-----|-----|------|--------|----------|
| classique | 69  | 126 | 954  | 48105  | 4736395  |
| Eu        | 18  | 47  | 721  | 62560  | 6240794  |
| Eu et al. | 24  | 44  | 1137 | 113492 | 13417099 |
| en ligne  | 4,3 | 6,6 | 28   | 288    | 3173     |

- anciens algorithmes :  $\approx$  quadratiques
- nouvel algorithme :  $\approx$  linéaire



$\mathcal{Q}(n, *) \subset \mathcal{H}(n, *)$ , mais la transformation n'est pas l'identité sur  $\mathcal{Q}(n, *)$ .

$\mathcal{Q}(n, *) \subset \mathcal{H}(n, *)$ , mais la transformation n'est pas l'identité sur  $\mathcal{Q}(n, *)$ .

Approche en ligne plus efficace tout en étant plus facile à implanter :

| méthode   | temps       | Python |
|-----------|-------------|--------|
| classique | quadratique | 74 ldc |
| Eu        | quadratique | 46 ldc |
| Eu et al. | quadratique | 35 ldc |
| en ligne  | linéaire    | 29 ldc |

$\mathcal{Q}(n, *) \subset \mathcal{H}(n, *)$ , mais la transformation n'est pas l'identité sur  $\mathcal{Q}(n, *)$ .

Approche en ligne plus efficace tout en étant plus facile à implanter :

| méthode   | temps       | Python |
|-----------|-------------|--------|
| classique | quadratique | 74 ldc |
| Eu        | quadratique | 46 ldc |
| Eu et al. | quadratique | 35 ldc |
| en ligne  | linéaire    | 29 ldc |

Vers une preuve formelle dans un assistant à la preuve ? (A. Mahboubi)

$\mathcal{Q}(n, *) \subset \mathcal{H}(n, *)$ , mais la transformation n'est pas l'identité sur  $\mathcal{Q}(n, *)$ .

Approche en ligne plus efficace tout en étant plus facile à implanter :

| méthode   | temps       | Python |
|-----------|-------------|--------|
| classique | quadratique | 74 ldc |
| Eu        | quadratique | 46 ldc |
| Eu et al. | quadratique | 35 ldc |
| en ligne  | linéaire    | 29 ldc |

Vers une preuve formelle dans un assistant à la preuve ? (A. Mahboubi)

Applicabilité à d'autres modèles de marches ?

$\mathcal{Q}(n, *) \subset \mathcal{H}(n, *)$ , mais la transformation n'est pas l'identité sur  $\mathcal{Q}(n, *)$ .

Approche en ligne plus efficace tout en étant plus facile à implanter :

| méthode   | temps       | Python |
|-----------|-------------|--------|
| classique | quadratique | 74 ldc |
| Eu        | quadratique | 46 ldc |
| Eu et al. | quadratique | 35 ldc |
| en ligne  | linéaire    | 29 ldc |

Vers une preuve formelle dans un assistant à la preuve ? (A. Mahboubi)

Applicabilité à d'autres modèles de marches ?

Lien entre le  $d$  donnant la position finale  $(d - k, d)$  d'une marche de  $\mathcal{Q}(n, k)$  et une statistique sur  $\mathcal{H}(n, k)$  ?