Un pentagone est vu comme une liste de cinq points ; si nous notons x_i et y_i l'abscisse et l'ordonnée du i^{e} point, alors un pentagone est une liste de dix nombres, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}^{10}$. Précisément nous employons la représentation

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5).$$

La transformation étudiée apparaît alors comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{10}$ dont la matrice s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Pour étudier les propriétés de la transformation sur les pentagones, nous sommes donc amenés à établir les propriétés de la matrice T et d'abord de la matrice A.

1 Complexification

Cette matrice A est une matrice circulante ; il convient donc d'introduire la matrice de permutation

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors la relation $A = (I_5 + C)/2$.

La matrice C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En effet elle annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$, puisqu'elle est associée à la permutation circulaire de longueur n

$$\gamma = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres ne peuvent être que des racines cinquièmes de l'unité. Notons alors ω une racine primitive cinquième de l'unité, comme $\exp(2i\pi/5)$, et ζ l'une des racines cinquièmes de l'unité 1, ω, ω^2, ω^3 ou ω^4. La relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \\ \zeta^5 \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \end{pmatrix}$$

montre que

$$v_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre pour C associé à la valeur propre ζ. Le spectre de C est donc exactement constitué des racines cinquièmes de l'unité et une base qui diagonalise C est $(v_1, v_\omega, v_{\omega^2}, v_{\omega^3}, v_{\omega^4})$.

Cette même base diagonalise la matrice A et les valeurs propres de la matrice A sont les $(1+\zeta)/2$ où ζ parcourt les racines cinquièmes de l'unité. Puisque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{C}^5$ se décompose en une somme directe de droites E_ζ, la droite E_ζ admettant comme vecteur directeur v_ζ, en notant toujours ζ les racines cinquièmes de l'unité. Du point de vue réel, la matrice A n'est pas diagonalisable, mais l'espace se décompose en la somme de trois sous-espaces V_0, V_1 et V_2. Le sous-espace V_0 est la droite réelle engendrée par $c_0 = v_1$. Celui-ci est sans mystère. Pour les deux autres autres il convient d'éclaircir d'abord le lien entre espace réel et espace complexe.

2 Réelification

Supposons qu'une matrice M réelle 2×2 admettent deux valeurs propres complexes conjuguées et non réelles $\rho e^{i\vartheta}$ et $\rho e^{-i\vartheta}$, avec ρ non nul et ϑ non congru à 0 modulo π. Il existe donc une matrice P inversible à coefficients complexes telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit diagonale. Plus précisément on a l'égalité

$$P^{-1}MP = D \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} \rho e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs colonnes de P donnent la base (e_1, e_2) qui permet de diagonaliser M. Le fait que e_1 et e_2 soient des vecteurs propres pour M se traduit par les égalités

$$Me_1 = \rho e^{i\vartheta} e_1, \qquad Me_2 = \rho e^{-i\vartheta} e_2.$$

Si nous appliquons la conjugaison aux deux termes de la première égalité, nous obtenons, en utilisant le fait que M est réelle et en notant $\overline{e_1}$ le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de e_1,

$$M\overline{e_1} = \rho e^{-i\vartheta}\overline{e_1}$$

et ceci montre que $\overline{e_1}$ est un vecteur propre relatif à la valeur propre $\rho e^{-i\vartheta}$. Les deux vecteurs propres e_2 et $\overline{e_1}$ engendrent donc la même droite complexe. Nous pouvons donc supposer que e_2 est exactement $\overline{e_1}$. On notera que ce raisonnement repose sur le fait que l'on a donné un sens à la conjugaison d'un vecteur. Nous renommons donc les deux vecteurs propres e_1 et e_2 en e et $\overline{e}$.

Séparons les parties réelles et imaginaires en écrivant

$$e = c + is, \quad \overline{e} = c - is,$$

avec c, s des vecteurs à composantes réelles. Le fait que e et $\overline{e}$ engendrent le plan complexe $\mathbb{C}^2$ implique que c et s engendrent le plan réel $\mathbb{R}^2$. En effet si un vecteur z est dans $\mathbb{R}^2$, il est a fortiori dans $\mathbb{C}^2$ et nous pouvons donc l'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de e et $\overline{e}$,

$$(\alpha + i\beta)e + (\gamma + i\delta)\overline{e}.$$

En développant nous voyons que le vecteur z s'écrit

$$z = (\alpha + \gamma)c - (\beta + \delta)s,$$

car la partie imaginaire est nulle, le vecteur z étant réel. Ceci montre que (c, s) est une famille génératrice à deux éléments de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part l'égalité $Me = \rho e^{i\vartheta} e$ devient

$$M(c + is) = (\rho \cos\vartheta + i\rho \sin\vartheta)(c + is)$$

et fournit les égalités

$$Mc = \rho\cos\vartheta c - \rho\sin\vartheta s, \quad Ms = \rho\sin\vartheta c + \rho\cos\vartheta s.$$

Autrement dit dans la base réelle (c, s) la matrice M devient

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta & \rho\sin\vartheta \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

en notant Q la matrice inversible réelle dont les deux vecteurs colonnes sont c et s. Si nous munissons $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle, la matrice obtenue est une matrice de similitude.

Revenons à la matrice A. Le regroupement des valeurs propres conjuguées fait apparaître deux sous-espaces de dimension 2 que nous notons V_1 et V_2. Le premier correspond aux deux valeurs propres

$$\frac{1+\omega}{2} = \frac{1+e^{2i\pi/5}}{2} = \cos^2(\pi/5) + i\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)$$

et

$$\frac{1+\overline{\omega}}{2} = \frac{1+e^{-2i\pi/5}}{2} = \cos^2(\pi/5) - i\cos(\pi/5)\sin(\pi/5).$$

Nous savons que pour chacune d'elles le sous-espace propre au sens complexe est une droite engendrée pour l'une par v_ω et pour l'autre par $v_{\overline{\omega}}$. Ces deux vecteurs sont conjugués ; nous pouvons donc appliquer la théorie précédente. Ceci nous fournit le sous-espace V_1 engendré par les deux vecteurs

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\pi/5) \\ \cos(4\pi/5) \\ \cos(6\pi/5) \\ \cos(8\pi/5) \end{pmatrix}, \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(2\pi/5) \\ \sin(4\pi/5) \\ \sin(6\pi/5) \\ \sin(8\pi/5) \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace V_1 est stable par A et A induit sur V_1 une transformation qui, dans la base (c_1, s_1), a pour matrice

$$B_1 = \cos(\pi/5) \begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ -\sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on définit un sous-espace stable v_2 de base les deux vecteurs

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(4\pi/5) \\ \cos(8\pi/5) \\ \cos(12\pi/5) \\ \cos(16\pi/5) \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(4\pi/5) \\ \sin(8\pi/5) \\ \sin(12\pi/5) \\ \sin(16\pi/5) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur A induit sur V_2 une transformation qui, dans la base (c_2, s_2), a pour matrice

$$B_2 = \cos(2\pi/5) \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ -\sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) \end{pmatrix}.$$

En assemblant ces résultats, nous voyons que la matrice A est semblable à la matrice bloc-diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \cos(\pi/5) & \rho_1 \sin(\pi/5) & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 \sin(\pi/5) & \rho_1 \cos(\pi/5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \cos(2\pi/5) & \rho_2 \sin(2\pi/5) \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 \sin(2\pi/5) & \rho_2 \cos(2\pi/5) \end{pmatrix},$$

avec $\rho_1 = \cos(\pi/5)$ et $\rho_2 = \cos(2\pi/5)$. La matrice de changement de base qui fait passer de A à B est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) & \cos(4\pi/5) & \sin(4\pi/5) \\ 1 & \cos(4\pi/5) & \sin(4\pi/5) & \cos(8\pi/5) & \sin(8\pi/5) \\ 1 & \cos(6\pi/5) & \sin(6\pi/5) & \cos(12\pi/5) & \sin(12\pi/5) \\ 1 & \cos(8\pi/5) & \sin(8\pi/5) & \cos(16\pi/5) & \sin(16\pi/5) \end{pmatrix}$$

et ses vecteurs colonnes sont dans l'ordre c_0, c_1, s_1, c_2, s_2.

3 Itération

Les valeurs propres de A sont sur le cercle de rayon $1/2$ centré en $1/2$. Mettons ceci en valeur (figure 1).

```
pointset:=plot({seq([(1+cos(2*k*Pi/n))/2,sin(2*k*Pi/n)/2],
                                                    k=0..n-1)},
                 view=[-1..1,-1..1],style=point,symbol=circle,
      color=red,xtickmarks=3,ytickmarks=3,scaling=constrained):
littlecircle:=plot([1/2+1/2*cos(t),1/2*sin(t),t=0..2*Pi],
             color=red,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained):
circleset:=plot([1,seq(evalc(abs((1+exp(2*I*k*Pi/n))/2)),
                                              k=0..iquo(n,2))],
                                  theta=0..2*Pi,coords=polar,
            color=blue,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained):
plots[display]({circleset,littlecircle,pointset});
```

Pour faire ressortir les modules des valeurs propres, nous avons tracé les cercles centrés en l'origine passant par les valeurs propres. Ce sont ces modules qui déterminent le comportement d'une suite définie par son premier terme u_0 et la récurrence $u_{n+1} = Au_n$. En effet si u_0 se décompose en

$$u_0 = \lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \mu_1 s_1 + \lambda_2 c_2 + \mu_2 s_2,$$

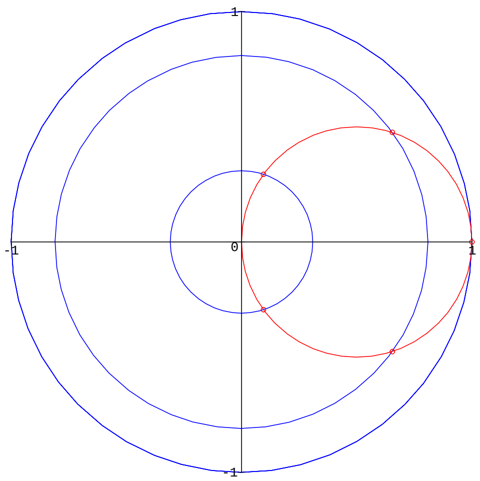

Figure 1:

alors le vecteur u_n est donné par

$$u_n = \lambda_0 c_0 + \rho_1^n \left[(\lambda_1 \cos(n\pi/5) + \mu_1 \sin(n\pi/5))c_1 + (-\lambda_1 \sin(n\pi/5) + \mu_1 \cos(n\pi/5))s_1\right] + \rho_2^n \left[(\lambda_2 \cos(2n\pi/5) + \mu_2 \sin(2n\pi/5))c_2 + (-\lambda_2 \sin(2n\pi/5) + \mu_2 \cos(2n\pi/5))s_2\right].$$

Comme ρ_1 et ρ_2 sont tous les deux strictement entre -1 et 1, la suite (u_n) a pour limite $\lambda_0 c_0$, c'est-à-dire la projection du vecteur u_0 sur le sous-espace V_0 parallèlement à la somme $V_1 \oplus V_2$.

4 Réduction

L'espace des pentagones est $\mathbb{R}^{10}$; nous le voyons comme le produit cartésien $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5$. La transformation T des pentagones apparaît comme un doublement de la transformation A que nous venons d'étudier. Nous définissons donc une base de $\mathbb{R}^{10}$ où T s'exprime de manière simple.

D'abord nous doublons le vecteur c_0 en introduisant

$$p_{0,1} = (c_0, 0), \qquad p_{0,2} = (0, c_0).$$

Autrement dit $p_{0,1}$ est le décuplet dont les cinq premières composantes sont égales à 1 et les cinq dernières à 0 ; inversement $p_{0,2}$ a ses cinq premières

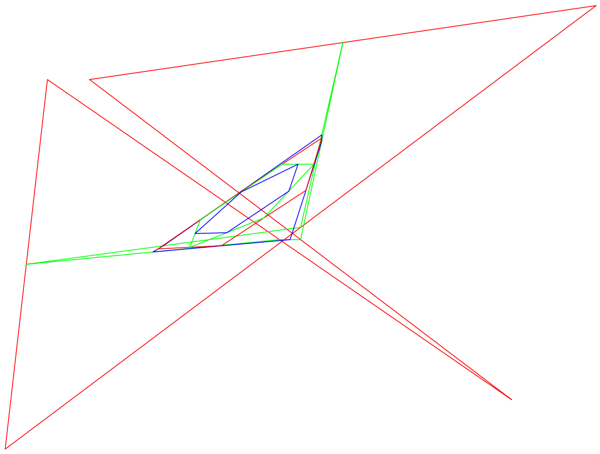

Figure 2:

composantes nulles et les cinq dernières égales à 1. Ces deux vecteurs engendrent un plan P_0. Les vecteurs de P_0 sont les décuplets de la forme

$$(x, x, x, x, x, y, y, y, y, y).$$

Un tel décuplet représente un pentagone dont les cinq sommets sont égaux, autrement dit un point. Nous pouvons donc voir le plan P_0 comme le plan de référence $\mathbb{R}^2$ où gisent tous les pentagones considérés. Le plan P_0 est le plan propre associé à la valeur propre 1 ; effectivement un pentagone réduit à un point est invariant dans la transformation.

Pour doubler les sous-espaces V_1 et V_2 nous pourrions par exemple introduire les quatre décuplets

$$(c_1, 0), \quad (0, c_1), \quad (s_1, 0), \quad (0, s_1).$$

De tels décuplets s'interprétent comme des quintuplets de points alignés sur les axes de $\mathbb{R}^2$, ce qui ne donne pas une vision intuitive du problème. Nous préférons donc employer

$$p_{1,1} = (c_1, s_1), \quad p_{1,2} = (s_1, -c_1), \quad p_{1,3} = (c_1, -s_1), \quad p_{1,4} = (s_1, c_1)\,;$$

$$p_{2,1} = (c_2, s_2), \quad p_{2,2} = (s_2, -c_2), \quad p_{2,3} = (c_2, -s_2), \quad p_{2,4} = (s_2, c_2)\,;$$

Les quatre premiers engendrent un sous-espace P_1 de dimension 4 et les quatre derniers un sous-espace P_2 aussi de dimension 4. Le vecteur $p_{1,1}$

apparaît comme le pentagone convexe régulier dont les sommets sont les racines cinquièmes de l'unité dans le plan complexe, parcouru dans le sens trigonométrique. Le vecteur $p_{1,3}$ représente le pentagone déduit du précédent par la symétrie orthogonale s_{Ox} par rapport à l'axe des abscisses ; autrement dit c'est le même pentagone mais parcouru dans le sens indirect. Quant à $p_{1,2}$ et $p_{1,4}$ ils se déduisent des précédents par symétrie orthogonale s_Δ par rapport à la diagonale du repère. On note que ces quatre pentagones sont réguliers convexes. On peut faire des remarques similaires pour les quatre pentagones $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{2,3}$, $p_{2,4}$; la seule différence est que l'on a affaire à des pentagones réguliers non convexes.

On peut même être plus précis : tous les pentagones qui sont dans P_1 sont convexes. En effet un élément de P_1 est une combinaison linéaire

$$\lambda_1 p_{1,1} + \lambda_2 p_{1,2} + \lambda_3 p_{1,3} + \lambda_4 p_{1,4}.$$

Ce pentagone se déduit du pentagone régulier convexe $p_{1,1}$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$

$$\lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + \lambda_2 r + \lambda_3 s_{Ox} + \lambda_4 s_\Delta,$$

en notant r la rotation d'un quart de tour dans le sens direct du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Ainsi du point de vue géométrique on passe de $p_{1,1}$ à un élément quelconque de P_1 par une application linéaire. Puisque l'image d'un convexe par une application linéaire est un convexe, tous les éléments de P_1 sont des pentagones convexes. On peut faire un raisonnement du même type pour les éléments de P_2 ; évidemment on ne peut pas dire que l'image d'un non convexe est un non convexe, mais on peut remarquer que le pentagone régulier non convexe $p_{2,1}$ possède deux côtés qui s'intersectent en exactement un point (il y a cinq choix possibles de telles paires de côtés). Hormis les cas de dégénérescence, on aura la même propriété pour le pentagone image par une application linéaire. On peut donc dire que presque tous les pentagones de P_2 sont non convexes.

5 Itération sur les pentagones

L'espace $\mathbb{R}^{10}$ des pentagones se décompose en la somme directe

$$\mathbb{R}^{10} = P_0 \oplus P_1 \oplus P_2.$$

On voit tout de suite que les huits vecteurs $p_{k,\ell}$ ont la propriété que la somme de leurs cinq premières composantes est nulle et de même la somme de leurs cinq dernières composantes est nulle. Du coup la projection sur P_0 parallèlement à $P_1 \oplus P_2$ n'est rien d'autre que l'application

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \longmapsto (\xi, \xi, \xi, \xi, \xi, \eta, \eta, \eta, \eta, \eta)$$

avec

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}.$$

Cette projection s'interprète aisément : elle consiste à prendre l'isobarycentre des cinq points d'un pentagone. Le fait que l'isobarycentre soit dans le sous-espace V_0 signifie simplement que dans la transformation T, l'isobarycentre d'un pentagone et l'isobarycentre de son image sont le même point. Ceci est d'ailleurs géométriquement évident. D'autre part le raisonnement que nous avons tenu dans la section précédente montre qu'en itérant la transformation, on obtient une suite de pentagones qui converge vers l'isobarycentre du pentagone de départ.

Puisqu'en itérant la transformation l'isobarycentre reste fixe, nous pouvons nous affranchir de le prendre en compte. Il suffit pour cela de le fixer à zéro, c'est-à-dire de ne considérer que des pentagones centrés à l'origine de $\mathbb{R}^2$. Cela revient à travailler dans le sous-espace $P_1 \oplus P_2$ de dimension 8. Dans un souci de clarté, nous explicitons la transformation T dans la base des $p_{k,\ell}$. Le point de départ est constitué des égalités

$$\begin{aligned}
Ac_1 &= \rho_1 \cos(\pi/5)c_1 - \rho_1 \sin(\pi/5)s_1, \\
As_1 &= \rho_1 \sin(\pi/5)c_1 + \rho_1 \cos(\pi/5)s_1, \\
Ac_2 &= \rho_2 \cos(2\pi/5)c_2 - \rho_2 \sin(2\pi/5)s_2, \\
As_2 &= \rho_2 \sin(2\pi/5)c_2 + \rho_2 \cos(2\pi/5)s_2,
\end{aligned}$$

qui apparaissent implicitement dans la matrice que nous avons appelée B. De là, nous tirons

$$\begin{aligned}
Tp_{1,1} &= (Ac_1, As_1) \\
&= \rho_1 \cos(\pi/5)(c_1, s_1) - \rho_1 \sin(\pi/5)(s_1, -c_1) \\
&= \rho_1 \cos(\pi/5)p_{1,1} - \rho_1 \sin(\pi/5)p_{1,2}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
Tp_{1,2} &= \rho_1 \sin(\pi/5)p_{1,1} + \rho_1 \cos(\pi/5)p_{1,2}, \\
Tp_{1,3} &= \rho_1 \cos(\pi/5)p_{1,3} - \rho_1 \sin(\pi/5)p_{1,4}, \\
Tp_{1,4} &= \rho_1 \sin(\pi/5)p_{1,3} + \rho_1 \cos(\pi/5)p_{1,4}.
\end{aligned}$$

La matrice de la transformation induite par T sur le sous-espace P_1 dans la base $(p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4})$ est donc

$$\rho_1 \begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & \sin(\pi/5) & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ 0 & 0 & -\sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) \end{pmatrix}.$$

On a un résultat similaire pour l'endomorphisme induit sur P_2.

La question qui a motivé cette étude portait sur la forme de pentagones et non sur leur taille. Nous normalisons donc la transformation en considérant maintenant T/ρ_1 au lieu de T. Maintenant, définissons une suite de pentagones en partant d'un pentagone initial p_0 pris dans $P_1 \oplus P_2$ et en itérant la transformation T/ρ_1, ce qui se traduit par la formule $p_{n+1} = \rho_1^{-1} T p_n$. À cause de la décomposition en somme directe, l'itération se traduit par deux itérations en parallèle, l'une dans P_1 et l'autre dans P_2. Pour ce qui est de P_2, on applique à chaque pas une transformation dont la matrice dans la base $(p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4})$ s'écrit

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) & 0 & 0 \\ -\sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ 0 & 0 & -\sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) \end{pmatrix}.$$

Comme ρ_2/ρ_1 a une valeur absolue strictement plus petite que 1, la suite des composantes dans P_2 converge vers le vecteur nul. D'autre part dans P_1 on applique la transformation dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & \sin(\pi/5) & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ 0 & 0 & -\sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) \end{pmatrix}.$$

Du coup la suite des composantes sur P_1 admet la période 10. Cependant un instant de réflexion nous fait penser que sur un pentagone convexe régulier la transformation géométrique est de période 2, parce qu'on oublie la liste qui représente le pentagone est circulaire et que son sens n'a pas d'importance. On arrive donc à l'idée que la suite des transformés admet deux valeurs d'adhérence du point de vue géométrique et dix du point de vue de la transformation linéaire dans $\mathbb{R}^{10}$. De plus on passe de l'une des valeurs d'adhérence (au sens géométrique) à l'autre valeur d'adhérence par une rotation d'un dixième de tour.

Finalement la question initiale se résout comme suit. Si nous tirons au hasard un pentagone, alors avec une probabilité nulle ce pentagone sera dans P_2 et lui-même ainsi que ses itérés seront non convexes. Avec une probabilité égale à 1 sa composante sur P_1 sera non nulle et dans l'itération sa composante sur P_2 tendra vers 0 exponentiellement plus vite que sa composante sur P_1, ce qui fait qu'en quelques itérations on obtiendra un pentagone convexe. Cette réponse est imprécise et même fausse car nous ne disons pas comment est déterminé la loi de probabilité utilisée, mais en tout sens raisonnable elle donne la clé du comportement observé. On notera aussi que la valeur $n = 5$ n'a aucune importance. Le raisonnement est valable à partir de $n = 4$ ou même $n = 3$ mais il n'y a alors plus de problème de convexité.