

Avant-propos

Le calcul scientifique ne se réduit plus au calcul numérique. Le calcul formel qui n'était encore que balbutiements il y a une vingtaine d'années est devenu un domaine structuré, comprenant une recherche théorique, des réalisations concrètes, une activité commerciale. La phase de mimétisme, vouée à la reproduction des performances d'un calculateur manuel, est terminée et les capacités de calcul actuelles dépassent largement les possibilités humaines. Aussi le calcul symbolique commence-t-il à être reconnu comme un outil performant ayant une contribution spécifique. Il intervient dans l'industrie, encore modestement; dans la recherche, d'une manière plus marquée; enfin dans l'enseignement, où son apport pédagogique est indéniable.

*
* *

Un système de calcul formel comme MAPLE propose en fait trois types de calculs: *calcul symbolique*, *calcul numérique* et *calcul graphique*. La raison d'être d'un tel système est évidemment le calcul symbolique, mais ces trois calculs sont complémentaires et chacun contribue à la qualité et l'intérêt du logiciel. L'ensemble permet d'une part une *illustration* de résultats théoriques, d'autre part une *expérimentation* à travers des formules, des valeurs numériques ou des graphiques. Le calcul symbolique et le calcul numérique fournissent une *aide au calcul* souvent utilisée de façon interactive. Enfin le calcul symbolique permet une *automatisation* des calculs mathématiques.

Ces approches variées amènent une nouvelle pratique des mathématiques: le raisonnement reste essentiel mais est motivé ou soutenu par l'expérience. Notre objectif est de présenter ces mathématiques concrètes.

*
* *

Devant les résultats fournis par le logiciel, le néophyte oscille entre l'incrédulité et la confiance excessive. Le calcul numérique et le calcul graphique peuvent impressionner par la manipulation de grands nombres ou la production de dessins complexes. Surtout le calcul symbolique pose question: les résultats fournis sont-ils dignes de crédit? Quels sont les moyens employés

pour les produire? Notre premier but est de faire comprendre le domaine d'utilisation du logiciel. Pour l'atteindre, nous fournissons une large collection d'exemples, d'exercices et de problèmes qui petit à petit vont permettre au lecteur de se forger une opinion, fondée sur une compréhension réelle de ce qu'est le système. On pourra noter que dans les exercices et problèmes il n'est pas rare que nous laissons planer une ambiguïté en ne précisant pas si la question se résout par la réflexion ou à l'aide de la machine. Ceci est volontaire et la question de fond est bien cette alternative.

Pour que l'utilisation du logiciel permette une meilleure pratique des mathématiques, il importe de travailler dans son esprit. Sinon les problèmes qu'il pose deviennent prépondérants et bientôt insurmontables. Au lieu de remplir sa fonction d'outil, il est alors un obstacle qui empêche d'aborder les questions de mathématiques. Notre deuxième but est donc que l'on puisse oublier le logiciel. On vante souvent MAPLE pour le nombre important de procédures qu'il comprend. Au contraire nous en présentons une partie limitée, facile à apprendre en un délai raisonnable. De plus nous donnons quelques règles de bonne conduite qui éliminent nombre de problèmes syntaxiques que rencontrent les débutants. Ainsi un style d'écriture d'une forte cohérence est mis en place, qui permet de se concentrer sur les problèmes de mathématiques.

*
* *

Le calcul symbolique est lié aux mathématiques de manière interactive. Non seulement il permet de pratiquer les mathématiques d'une manière nouvelle, et nous illustrons abondamment cet aspect; mais il pose de nouveaux problèmes mathématiques. Essentiellement il demande que les théorèmes deviennent concrets; l'existence d'un objet doit se traduire en un procédé effectif de construction de cet objet. Par ailleurs l'emploi d'un ordinateur amène naturellement des questions d'algorithmique et d'efficacité. Ces questions sont abordées au travers des exercices et des sujets d'étude, afin de montrer que non seulement la pratique des mathématiques est influencée par l'emploi d'un système de calcul formel, mais encore que la problématique en est modifiée.

*
* *

L'ouvrage est structurée en deux livres. Dans le premier livre nous décrivons la syntaxe et les conseils que nous évoquons plus haut. Notre description est assez détaillée, à la fois pour que le lecteur acquière une certaine aisance et pour qu'il comprenne la raison d'être des règles que nous proposons. Ces règles ont l'aspect suivant:

Règle 0: L'utilisateur est intelligent; le logiciel ne l'est pas.

et sont récapitulées dans un code de bonne conduite. De même la petite centaine d'unités syntaxiques ou de procédures que nous considérons comme essentielles forme la matière d'un appendice, baptisé MICROMAPLE. Tous les exemples et exercices traités sont mathématiques et le niveau de connaissances nécessaire est limité de manière que ce premier livre soit abordable par un élève en cours de classe terminale scientifique.

Le second livre est un cours de mathématiques traitant certains points du programme des classes préparatoires au grandes écoles ou du DEUG. Il ne s'agit pas d'un cours complet, loin de là, mais d'un prétexte à illustrer l'usage de MAPLE en mathématiques. Le texte est structuré en chapitres, qui chacun commencent par des rappels ou des compléments de mathématiques en liaison avec l'utilisation du logiciel. Ensuite viennent des exercices et des sujets d'étude. Ceux-ci sont classés en *problèmes* centrés sur le chapitre en cours, et *thèmes* un peu plus ouverts ou plus subtils. Tous les exercices et la majorité des sujets d'étude sont pourvus d'une correction détaillée.

*
* *

La matière de ce livre peut servir de base à un cours d'une année structurée en deux parties. La première partie, bien que riche, doit être traitée en un délai assez court pour être efficace. Elle verra s'alterner des travaux dirigés fondés sur les exercices et consacrés au sous-ensemble du système que nous avons baptisé MICROMAPLE et des cours portant sur les règles du bon usage. La deuxième partie comprendra essentiellement des travaux dirigés fondés sur les sujets d'étude en liaison avec le cours de mathématiques. Quelques brèves séances de cours seront utiles pour montrer les tours de main nécessaires à une bonne pratique du logiciel.

*
* *

Différents organismes ou personnes ont concouru à la réalisation de cet ouvrage. L'Institut national de recherche en informatique et automatique et spécialement le Projet ALGORITHMES ont mis à notre disposition des moyens matériels importants. PHILIPPE FLAJOLET, soucieux de l'enseignement du calcul formel dans notre pays, nous a incité à donner des cours sur la pratique du logiciel MAPLE. Ensuite des discussions nombreuses et enrichissantes avec BRUNO SALVY, FRANÇOIS MORAIN, FRÉDÉRIC CHYZAK et les encouragements de VIRGINIE COLLETTE ont accompagné notre réflexion sur l'emploi, l'impact et l'enseignement du calcul formel. Nous sommes particulièrement redevables à BRUNO SALVY qui a répondu patiemment à nos innombrables questions avec précision et clarté et nous a montré la voie à suivre. CATRIONA BYRNE et INGRID BEYER ont représenté la maison d'édition Springer-Verlag avec une compétence sans faille et une exquise amabilité. Nous les remercions tous et toutes chaudement.

*
* *

Les remarques seront les bienvenues à l'une des adresses suivantes.

Philippe Dumas	<code>Philippe.Dumas@inria.fr</code>
Projet ALGORITHMES	
INRIA	<code>Xavier.Gourdon@inria.fr</code>
Domaine de Voluceau	
Rocquencourt B.P. 105	
78153 Le Chesnay Cedex	

De probables corrections, d'éventuels commentaires peuvent être consultés à l'adresse Web suivante: <http://www-rocq.inria.fr/algo/dumas>.

*
* *

C'est une grande joie que de faire avouer à un automate des vérités que nous ne pourrions atteindre sans lui. Nous vous souhaitons de trouver le même plaisir, la même excitation que nous avons ressentis en préparant ces exercices et ces problèmes.

Les auteurs,
Rocquencourt, le 30 juin 1997

Table des matières

Livre premier. Le système Maple

1. Présentation du système	3
1 Initiation	3
2 Conseils pratiques	7
3 Expressions	10
Démontage des expressions	10
Conversion	13
Construction de séquences	14
Substitution	16
4 Types	19
5 Structures itératives	21
Boucles	21
Opérations itératives	24
6 Conditionnement	29
7 Programmation	31
En-tête de procédure	33
Sortie explicite	34
Remembrance	36
8 Évaluation	41
Évaluation des tables et des procédures	41
Évaluation dans les procédures	42
Procédures de réécriture	43
9 Commandes inertes et opérateurs neutres	45
10 Réponses aux exercices	48
2. Le bon usage	67
1 Traduction	67
Formes normales	67
Représentation des fonctions	70
2 Gestion des variables	73
Symboles et variables	73
Accent aigu	74
Noms indexés	76
Variables locales	79

	Variables globales	81
	Variables d'environnement	82
	Noms pour les extensions	86
3	Style	87
	Généricité	87
	Indépendance par rapport à la session	89
4	Simplification	92
	Système et utilisateur	92
	Emploi des outils appropriés	93
	Simplification hypothétique	94
5	Code de bonne conduite	95
6	Réponses aux exercices	96

Livre second. Mathématiques assistées par ordinateur

1.	Arithmétique	109
1	Domaine et outils	109
	Anneaux euclidiens	109
	Théorème de Bézout	112
	Petit théorème de Fermat	115
	Ordre d'un élément	117
	Décomposition en éléments simples	118
2	Exercices	121
3	Problèmes	124
	Développement décimal d'un rationnel	124
4	Thèmes	127
	Nombres de Carmichael	127
5	Réponses aux exercices	128
2.	Algèbre linéaire	141
1	Domaine et outils	141
	Syntaxe	141
	Polynôme minimal	143
	Noyaux itérés	144
	Récurrences linéaires à coefficients constants	147
2	Exercices	150
3	Problèmes	153
	Matrices et récurrences linéaires	153
	Méthode de Gauss-Jordan	155
	Lemme des noyaux	157
4	Thèmes	160
	Technique de Sœur Céline	160
5	Réponses aux exercices	164

3. Espaces euclidiens	173
1 Domaine et outils	173
Transformations orthogonales	173
Analyse numérique matricielle.....	176
2 Exercices	178
3 Problèmes	181
Méthode de Jacobi	181
4 Thèmes	183
Méthode de réduction en carrés de Gauss	183
5 Réponses aux exercices	186
4. Approximation	191
1 Domaine et outils	191
Continuité des fonctions de deux variables	191
Calcul asymptotique	195
Formule d'Euler-Maclaurin	197
2 Exercices	200
3 Problèmes	203
Fractions continuées	203
Polynômes de Bernstein	206
4 Thèmes	208
Phénomène de Runge	208
Solutions asymptotiques	208
5 Réponses aux exercices	212
5. Fonctions d'une variable réelle	223
1 Domaine et outils	223
Primitives de fonctions rationnelles	223
Fonctions réciproques	226
Intégrales dépendant d'un paramètre.....	227
2 Exercices	232
3 Problèmes	235
Polynômes à puissances creuses	235
Arithmétique d'intervalles	237
4 Thèmes	239
Intégration par parties	239
5 Réponses aux exercices	244
6. Séries	255
1 Domaine et outils	255
Séries numériques	255
Séries de fonctions	257
Somme de séries entières	259
Recherche de développements	262
Séries de Fourier	265

2	Exercices	268
3	Problèmes	271
	Méthode de Kummer	271
	Accélération de la convergence des séries alternées	273
	Phénomène de Gibbs.....	276
4	Thèmes	280
	Séries de Fourier des polygones.....	280
5	Solution des exercices	281
7.	Équations différentielles	297
1	Domaine et outils	297
	Équations du premier ordre	297
	Portrait de phase.....	305
	Équations linéaires du second ordre	310
2	Exercices	312
3	Problèmes	317
	Stabilité.....	317
4	Thèmes	320
	Holonomie des fonctions algébriques	320
	Équations de Riccati	323
5	Réponses aux exercices	325
8.	Géométrie	337
1	Domaine et outils	337
	Courbes unicursales.....	337
	Enveloppes	344
2	Exercices	350
3	Problèmes	353
	Méthode d'exclusion	353
4	Thèmes	354
	Courbure de Gauss	354
5	Réponses aux exercices	358

Appendice.

A.	Réponses aux problèmes et thèmes	371
1	Arithmétique	371
	Développement décimal d'un rationnel	371
	Nombres de Carmichael	373
2	Algèbre linéaire	377
	Matrices et récurrences linéaires.....	377
	Méthode de Gauss-Jordan	379
	Lemme des noyaux	381
3	Algèbre bilinéaire.....	384

	Méthode de Jacobi	384
	Méthode de réduction en carrés de Gauss	388
4	Approximation	392
	Polynômes de Bernstein	392
	Phénomène de Runge	395
5	Fonctions de variable réelle	397
	Arithmétique d'intervalles	397
	Intégration par parties	401
6	Séries	405
	Méthode de Kummer	405
	Séries de Fourier des polygones	406
7	Équations différentielles	409
	Stabilité	409
	Holonomie des fonctions algébriques	413
	Équations de Riccati	415
8	Géométrie	420
	Méthode d'exclusion	420
	Courbure de Gauss	421
	B. Préalables	427
	C. Compatibilité V.3–V.4	429
	D. MicroMaple	433
	Bibliographie	447
	Index	453