

CALCUL EFFICACE DE COEFFICIENTS DE SÉRIES

Thématique : Calcul formel

Institution : Centre de recherche INRIA - Saclay-ÎDF

Lieu : Palaiseau (France)

Équipe/projet : SpecFun

Directeurs de stage :

Alin Bostan (alin.bostan@inria.fr) et

Frédéric Chyzak (frederic.chyzak@inria.fr)

Directeur du laboratoire : Nozha Boujemaa (nozha.boujemaa@inria.fr)

Présentation générale du domaine :

Le besoin de calculer un unique coefficient d'une série formelle donnée se rencontre de manière récurrente en combinatoire. En effet, dans bien des cas, le dénombrement d'objets soumis à certaines contraintes structurelles se ramène à l'extraction d'un coefficient d'une série. Par exemple, le nombre de graphes non orientés sur n sommets desquels partent exactement 2 arêtes est égal à $n!$ fois le coefficient de z^n dans le développement en série à l'origine de $(1-z)^{-1/2} \exp(-z/2 - z^2/4)$. Des contextes plus élaborés font intervenir des dénombrements selon plusieurs paramètres et des séries en plusieurs variables. Il s'agit alors d'extraire le coefficient d'un monôme en plusieurs variables. Ainsi, par exemple, le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k parts est égal à $n!$ fois le coefficient de $w^k z^n$ dans le développement en série bivariée à l'origine de $\exp(w(e^z - 1))$. Pour des raisons évidentes d'efficacité, il importe de pouvoir calculer ce coefficient sans nécessairement calculer tous les coefficients précédents dans la série.

Objectifs du stage :

Ce stage s'intéresse à des algorithmes rapides pour l'extraction de tels coefficients pour des classes de séries dont les coefficients sont liés par un jeu de récurrences linéaires. Ces dernières permettent alors de les calculer tous de proche en proche. Le calcul naïf du coefficient d'indice (N_1, \dots, N_r) revient à calculer d'abord essentiellement tous les coefficients d'indices (n_1, \dots, n_r) pour $n_1 + \dots + n_r < N = N_1 + \dots + N_r$. Le calcul d'un unique coefficient requiert donc un nombre d'opérations de l'ordre de N^r , ce qui rend rapidement les calculs impraticables.

Dans les articles en référence ci-dessous, Massazza et Radicioni ont donné deux algorithmes très semblables pour calculer un coefficient unique en un nombre d'opérations de l'ordre de seulement N pour deux classes de séries : les séries qui proviennent de fractions rationnelles et les séries qui vérifient un système d'équations différentielles linéaires. Le premier objectif du stage est d'implanter ces algorithmes et de les confronter à des exemples d'application.

Si le temps le permet, on cherchera ensuite à accélérer encore ces algorithmes, des techniques classiques (Bostan et al., 2014) semblant se prêter à la situation.

Bibliographie :

- P. Massazza et R. Radicioni : On computing the coefficients of rational formal series. (2004). In : *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Vancouver, 2004*.
- P. Massazza et R. Radicioni : On computing the coefficients of bivariate holonomic formal series. *Theoretical Computer Science* 346 (2005), no. 2-3, 418–438.
- A. Bostan, F. Chyzak, M. Giusti, R. Lebreton, B. Salvy, É. Schost : Algorithmes Efficaces en Calcul Formel. Notes du cours 2-22 du MPRI (2014), <http://perso.ens-lyon.fr/bruno.salvy/mpri/poly.pdf>.

Compétences demandées :

Le stagiaire devra avoir le goût de la programmation d'algorithmes sur des données mathématiques. Une connaissance minimale d'un système de calcul formel généraliste sera un plus.