

PREUVES ALGORITHMIQUES POUR LA TRANSCENDANCE DES SÉRIES

Thématique : Calcul formel

Institution : Centre de recherche INRIA - Saclay-ÎDF

Lieu : Palaiseau (France)

Équipe/projet : SpecFun

Directeurs de stage :

Alin Bostan (alin.bostan@inria.fr) et

Frédéric Chyzak (frederic.chyzak@inria.fr)

Directeur du laboratoire : Nozha Boujemaa (nozha.boujemaa@inria.fr)

Présentation générale du domaine : Une série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ de $\mathbb{Q}[[t]]$ est dite algébrique si elle est racine d'un polynôme $P(t, s) \in \mathbb{Q}[t, s]$, et transcendante sinon. Un besoin récurrent en combinatoire énumérative est d'établir l'algébricité ou la transcendance d'une série génératrice; voir (Bousquet-Mélou, 2005). Par exemple, il est connu que la suite dénombrant les cartes planaires à n arêtes admet une série génératrice algébrique, et que la série génératrice des marches d'un roi d'échecs dans un quart de plan est transcendante. Dans les deux cas, la suite de dénombrement est P-réursive, c'est-à-dire qu'elle vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Pour prouver la transcendance de la série génératrice d'une telle suite, plusieurs approches existent. Par exemple, des considérations sur la nature asymptotique (Flajolet, 1987), ou arithmétique (Allouche, 1999), de la suite permettent dans certains cas de conclure.

Objectifs du stage : Ce stage s'intéresse à l'étude, la comparaison et l'implantation de méthodes algorithmiques permettant de répondre de façon uniforme à la question suivante :

Étant donnée une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ représentée par une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux et des conditions initiales, décider de la transcendance de la série $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$.

La question n'est pas triviale même pour des suites vérifiant une récurrence du premier ordre. Un algorithme classique permet en principe d'y répondre dans le cas général (Singer, 1979). Cependant, cet algorithme souffre d'une complexité trop élevée pour pouvoir être efficace en pratique. Une méthode plus récente a été proposée, sur un exemple combinatoire non trivial, dans (Bostan et al., 2014); elle permet de ramener la question de la transcendance à une question d'algèbre linéaire. Les objectifs centraux de ce stage seront de comprendre la nouvelle méthode, de l'explicitier en algorithme uniforme sur une classe à définir, d'implanter cet algorithme, de le tester et de mesurer son efficacité théorique et pratique. Dans l'idéal, le stage aboutira à un algorithme hybride combinant la nouvelle méthode, et les méthodes asymptotiques, arithmétiques et algébriques évoquées précédemment.

Bibliographie :

- J.-P. Allouche : Transcendence of formal power series with rational coefficients. *Theoretical Computer Science* 218 (1999), 143–160.
- A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. Kauers, S. Melczer : On 3-dimensional lattice walks confined to the positive octant (2014), <http://arxiv.org/abs/1409.3669>.
- M. Bousquet-Mélou : Algebraic generating functions in enumerative combinatorics, and context-free languages. *STACS 2005, Lect. Notes Comput. Sci.* 3404 (2005), 18–35.
- Ph. Flajolet : Analytic models and ambiguity of context-free languages. *Theoretical Computer Science* 49 (1987), 283–309.
- M. F. Singer : Algebraic Solutions of n th Order Linear Differential Equations. *Queens Papers in Pure and Applied Mathematics*, 54 (1979), 379–420.

Compétences demandées :

Le stagiaire devra avoir le goût de la programmation d'algorithmes sur des données mathématiques. Une connaissance minimale d'un système de calcul formel généraliste sera un plus.