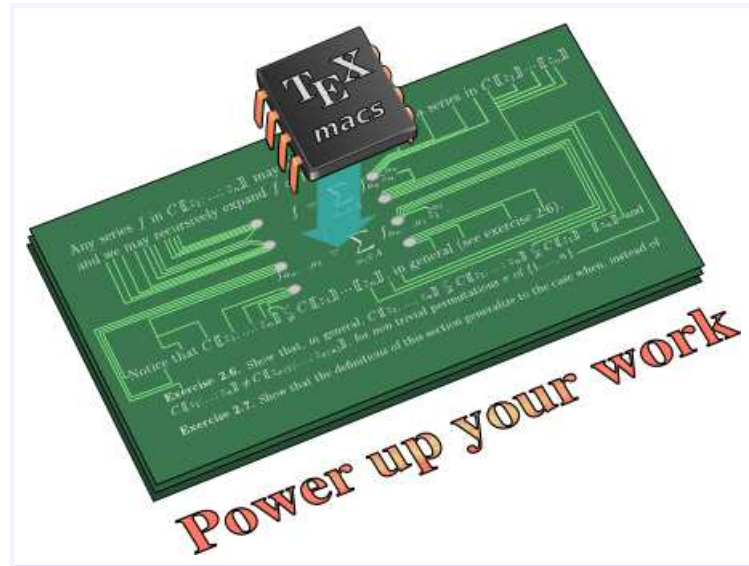


# Évaluation uniformément rapide de fonctions holonomes

Joris van der Hoeven, CNRS, École polytechnique



Specfun, 20 février 2017

<http://www.TEXMACS.org>

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}[z]/(\mu(z)) \subseteq \mathbb{C}$  corps de nombres avec  $i \in \mathbb{K}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}[z]/(\mu(z)) \subseteq \mathbb{C}$  corps de nombres avec  $i \in \mathbb{K}$

## Fonction holonome sur $\mathbb{K}$

Solution d'une équation différentielle

$$L_r(z) f^{(r)}(z) + \cdots + L_0(z) f(z) = 0$$

avec  $L_0, \dots, L_r \in \mathbb{K}(z)$  et  $L_r \neq 0$ . On supposera toutes les racines de  $L_r$  dans  $\mathbb{K}$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}[z]/(\mu(z)) \subseteq \mathbb{C}$  corps de nombres avec  $i \in \mathbb{K}$

## Fonction holonome sur $\mathbb{K}$

Solution d'une équation différentielle

$$L_r(z) f^{(r)}(z) + \dots + L_0(z) f(z) = 0$$

avec  $L_0, \dots, L_r \in \mathbb{K}(z)$  et  $L_r \neq 0$ . On supposera toutes les racines de  $L_r$  dans  $\mathbb{K}$ .

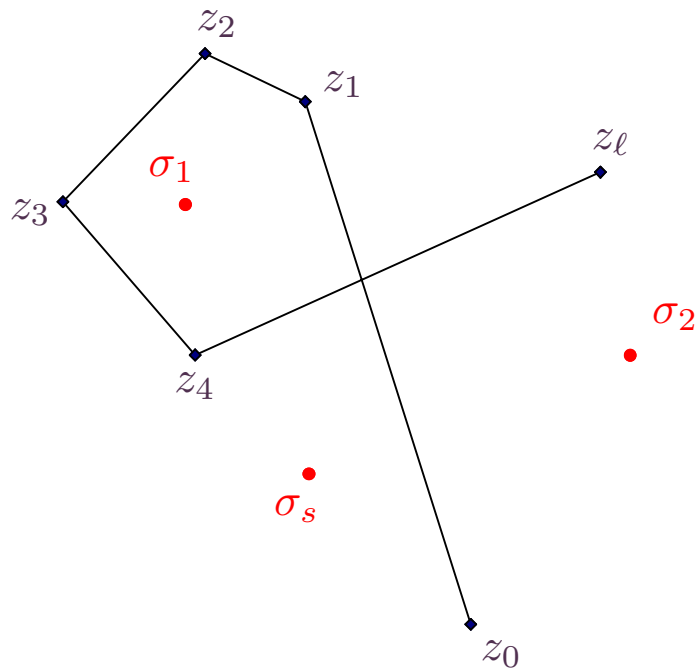
## Conditions initiales dans $\mathbb{K}$

En tant que fonction analytique,  $f$  déterminée par  $F(z) = \begin{pmatrix} f(z) \\ \vdots \\ f^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$  où  $L_r(z) \neq 0$ .

Conditions initiales dans  $\mathbb{K}$  :  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$  pour  $z_0 \in \mathbb{K}$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

 $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  : racines de  $L_r$  et **singularités** de  $f$  $\sigma_1$   
• $\sigma_2$   
• $\sigma_s$   
•



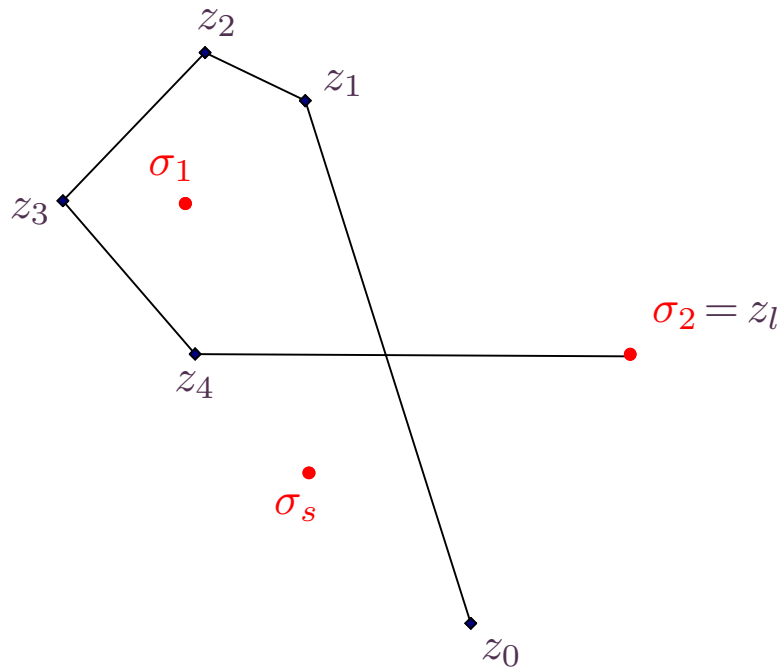
$\sigma_1, \dots, \sigma_s$  : racines de  $L_r$  et **singularités** de  $f$

$z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_\ell$  non singulier,  $z_0, \dots, z_\ell \in \mathbb{K}$

Condition initiale  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$

Pour  $\varepsilon \in \mathbb{Q}^>$ , calculer  $v \in \mathbb{K}$  avec

$$|f(z_\ell) - v| \leq \varepsilon$$



$\sigma_1, \dots, \sigma_s$  : racines de  $L_r$  et **singularités** de  $f$

$z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_\ell$  **singulier**,  $z_0, \dots, z_\ell \in \mathbb{K}$

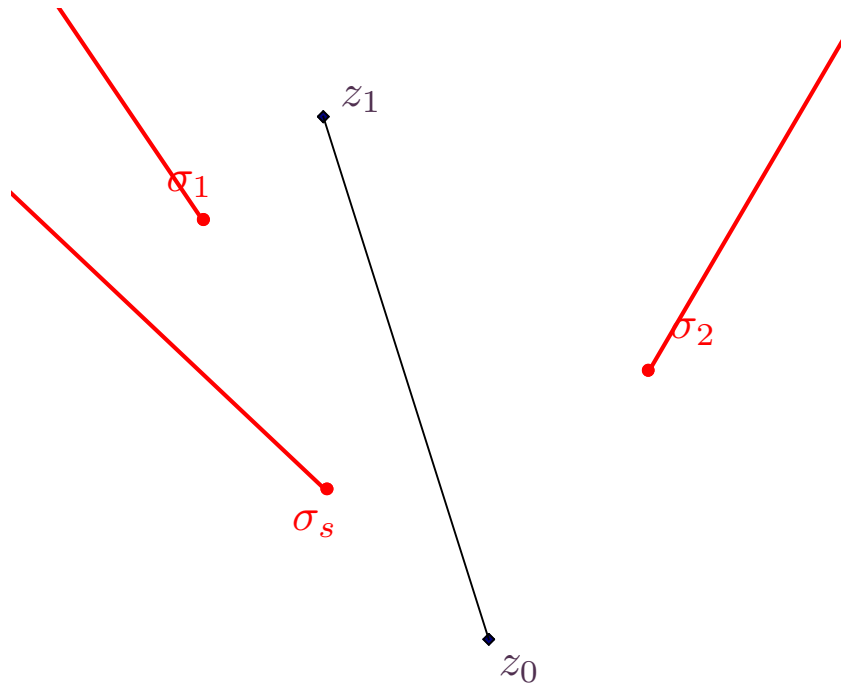
Condition initiale  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$

Limite  $\lambda = \lim_{t \downarrow 0} f(z_\ell - (z_\ell - z_{\ell-1})t)$  existe

Pour  $\varepsilon \in \mathbb{Q}^>$ , calculer  $v \in \mathbb{K}$  avec

$$|\lambda - v| \leq \varepsilon$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

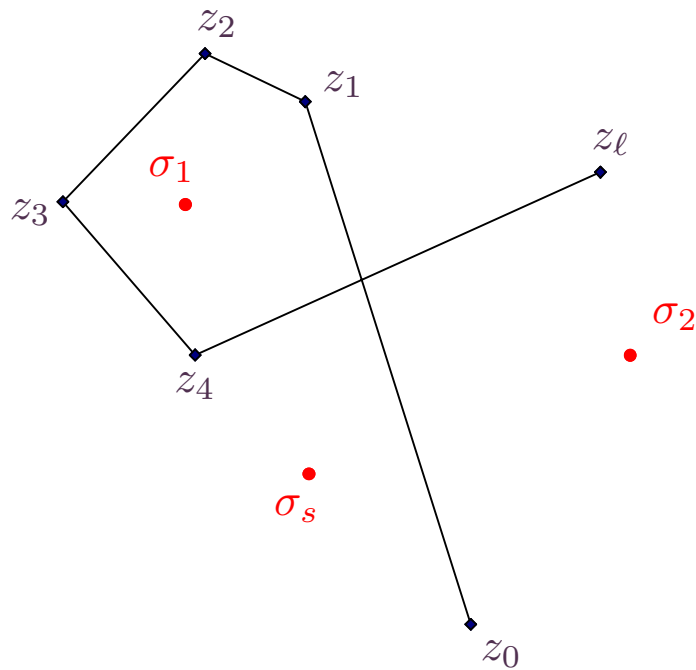


$\sigma_1, \dots, \sigma_s$  : racines de  $L_r$  et **singularités** de  $f$

$z_0 \rightarrow z_1$  chemin droit,  $z_0, z_1 \in \mathbb{K}$

pas de singularités sur  $[z_0, z_1)$



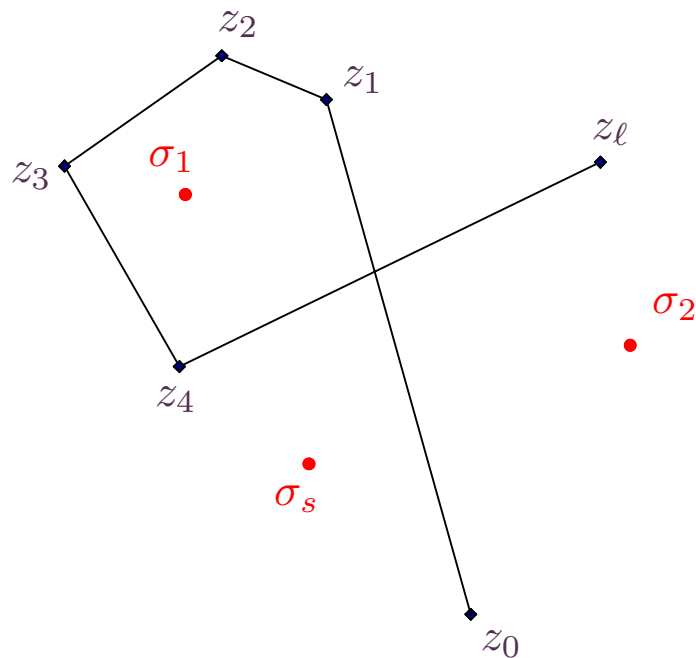


$z_0 \xrightarrow{\gamma} z_\ell$  non singulier

Condition initiale  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$

$F(z_\ell)$  dépend linéairement de  $F(z_0) \implies$

$\exists! \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_\ell} \in \mathbb{C}^{r \times r}, F(z_\ell) = \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_\ell} F(z_0)$



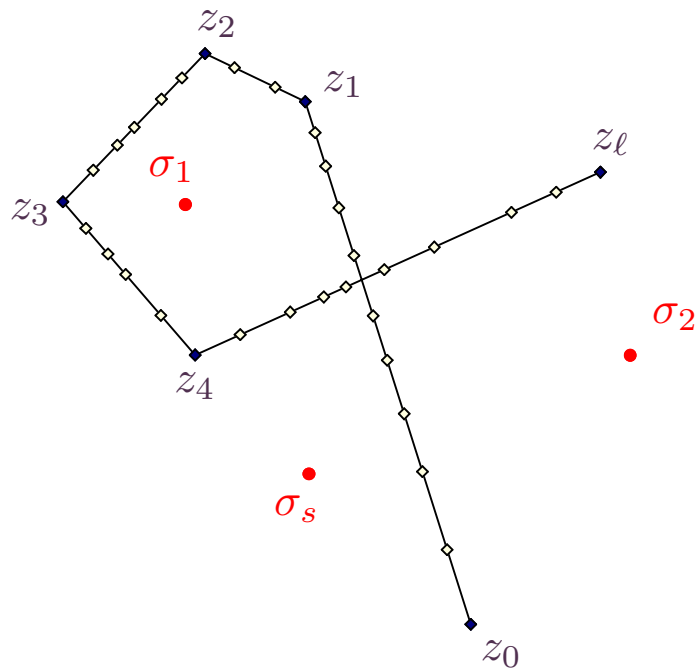
$z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l$  non singulier

Condition initiale  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$

$F(z_l)$  dépend linéairement de  $F(z_0) \implies$

$\exists! \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l} \in \mathbb{C}^{r \times r}, F(z_l) = \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l} F(z_0)$

$$z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_l \sim z_0 \xrightarrow{\gamma_2} z_l \implies \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_l} = \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_2} z_l}$$



$z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l$  non singulier

Condition initiale  $F(z_0) \in \mathbb{K}^r$

$F(z_l)$  dépend linéairement de  $F(z_0) \implies$

$\exists! \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l} \in \mathbb{C}^{r \times r}, F(z_l) = \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma} z_l} F(z_0)$

$$z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_l \sim z_0 \xrightarrow{\gamma_2} z_l \implies \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_m} = \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_2} z_m}$$

$$\Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_m \xrightarrow{\gamma_2} z_l} = \Delta_{z_m \xrightarrow{\gamma_2} z_l} \Delta_{z_0 \xrightarrow{\gamma_1} z_m}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Point non singulier

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

◆  
 $z_0 = 0$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Point non singulier

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

◆  
 $z_0 = 0$

$$Lh_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Point non singulier

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

◆  
 $z_0 = 0$

$$L h_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

$$\Delta_{0 \rightarrow 0} = \text{Id}_r$$

$$h_i(z) = \frac{1}{i!} z^i + O(z^r)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

## Point singulier régulier

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_k = z_0 = 0$$

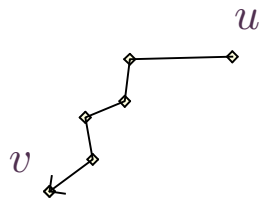
$$L h_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

$$h_i = z^{\lambda_i} \sum_{j < r} h_{i,j}(\sqrt[r]{z}) \log^j z, \quad h_{i,j} \text{ convergents}$$

$$h_i \sim z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z, \quad [z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z] h_{i'} = \delta_{i,i'}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

## Point singulier régulier



$$\sigma_k = z_0 = 0$$

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

$$L h_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

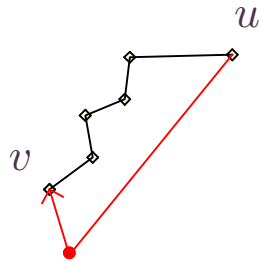
$$h_i = z^{\lambda_i} \sum_{j < r} h_{i,j}(\sqrt[r]{z}) \log^j z, \quad h_{i,j} \text{ convergents}$$

$$h_i \sim z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z, \quad [z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z] h_{i'} = \delta_{i,i'}$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Point singulier régulier



$$\sigma_k = z_0 = 0$$

$$\Delta_{u \rightarrow v} = \Delta_{0 \rightarrow v} \Delta_{0 \rightarrow u}^{-1}$$

$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

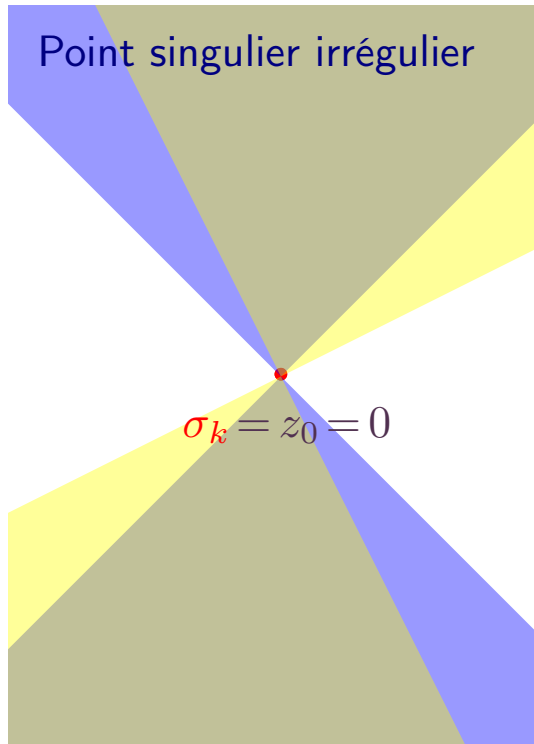
$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

$$L h_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

$$h_i = z^{\lambda_i} \sum_{j < r} h_{i,j} (\sqrt[r]{z}) \log^j z, \quad h_{i,j} \text{ convergents}$$

$$h_i \sim z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z, \quad [z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z] h_{i'} = \delta_{i,i'}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21



$$F(z) = \Delta_{0 \rightarrow z} F(0)$$

$$\Delta_{0 \rightarrow z} = \begin{pmatrix} h_0(z) & \cdots & h_{r-1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^{(r-1)}(z) & \cdots & h_{r-1}^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

$$L h_i = L_r h_i^{(r)} + \cdots + L_0 h_i = 0$$

$$h_i = e^{P_i\left(\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)} z^{\lambda_i} \sum_{j < r} h_{i,j}\left(\frac{\varrho}{\sqrt[r]{z}}\right) \log^j z,$$

$$h_i \sim \mathfrak{d}_i = e^{P_i\left(\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)} z^{\lambda_i} \log^{\mu_i} z, \quad [\mathfrak{d}_i] h_{i'} = \delta_{i,i'}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$I(n)$  : complexité pour multiplier deux entiers de  $n$  chiffres.

**Théorème. (VdH 1996)** *Il existe un algorithme qui prend  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r > 0$ ,  $z, z' \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et, supposant que  $L_r$  ne s'annule pas sur  $[z, z']$ , calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{z \rightarrow z'}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z, z'$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(I(n) \log^2 n)$ .*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$I(n)$  : complexité pour multiplier deux entiers de  $n$  chiffres.

**Théorème. (VdH 1996)** *Il existe un algorithme qui prend  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r > 0$ ,  $z, z' \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et, supposant que  $L_r$  ne s'annule pas sur  $[z, z']$ , calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{z \rightarrow z'}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z, z'$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(I(n) \log^2 n)$ .*

Résultats partiels : Brent (1976), Chudnovsky<sup>2</sup> (1990), ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$I(n)$  : complexité pour multiplier deux entiers de  $n$  chiffres.

**Théorème. (VdH 1996)** *Il existe un algorithme qui prend  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r > 0$ ,  $z, z' \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et, supposant que  $L_r$  ne s'annule pas sur  $[z, z']$ , calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{z \rightarrow z'}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z, z'$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(I(n) \log^2 n)$ .*

Résultats partiels : Brent (1976), Chudnovsky<sup>2</sup> (1990), ...

**Théorème. (VdH 1996)** *Si  $z, z'$  appartiennent à un ensemble compact  $K$  sur lequel  $L_r$  ne s'annule pas, alors le temps de calcul est borné par  $O(I(n) \log^2 n \log \log n)$ , **uniformément** en  $z$  et en  $z'$ , sous condition que les tailles de  $z$  et de  $z'$  ne dépassent pas  $O(n)$  bits.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$l(n)$  : complexité pour multiplier deux entiers de  $n$  chiffres.

**Théorème. (VdH 1996)** *Il existe un algorithme qui prend  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r > 0$ ,  $z, z' \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et, supposant que  $L_r$  ne s'annule pas sur  $[z, z']$ , calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{z \rightarrow z'}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z, z'$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^2 n)$ .*

Résultats partiels : Brent (1976), Chudnovsky<sup>2</sup> (1990), ...



**Théorème. (VdH 1996)** *Si  $z, z'$  appartiennent à un ensemble compact  $K$  sur lequel  $L_r$  ne s'annule pas, alors le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^2 n \log \log n)$ , **uniformément** en  $z$  et en  $z'$ , sous condition que les tailles de  $z$  et de  $z'$  ne dépassent pas  $O(n)$  bits.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

**Théorème. (VdH 2001)** Supposons  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r$ , régulier-singulier en zéro et tel que la solution formelle converge pour  $z = r e^{i\theta}$  avec  $0 < r \leq R$ . Il existe un algorithme qui prend de tels  $L$  et  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{K}$ , ainsi que  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et qui calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{0 \rightarrow z}\| \leq 2^{-n}.$$

En outre, pour  $z$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^2 n)$ . Par ailleurs, tant que la taille de  $z$  ne dépasse pas  $O(n)$  bits, le temps de calcul est **uniformément** borné par  $O(l(n) \log^2 n \log \log n)$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

**Théorème. (VdH 2001)** Supposons  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r$ , régulier-singulier en zéro et tel que la solution formelle converge pour  $z = r e^{i\theta}$  avec  $0 < r \leq R$ . Il existe un algorithme qui prend de tels  $L$  et  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{K}$ , ainsi que  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et qui calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{0 \rightarrow z}\| \leq 2^{-n}.$$

En outre, pour  $z$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^2 n)$ . Par ailleurs, tant que la taille de  $z$  ne dépasse pas  $O(n)$  bits, le temps de calcul est **uniformément** borné par  $O(l(n) \log^2 n \log \log n)$ .



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

**Théorème. (VdH 2001)** Supposons  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r$ , régulier-singulier en zéro et tel que la solution formelle converge pour  $z = r e^{i\theta}$  avec  $0 < r \leq R$ . Il existe un algorithme qui prend de tels  $L$  et  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{K}$ , ainsi que  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, et qui calcule une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{0 \rightarrow z}\| \leq 2^{-n}.$$

En outre, pour  $z$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^2 n)$ . Par ailleurs, tant que la taille de  $z$  ne dépasse pas  $O(n)$  bits, le temps de calcul est **uniformément** borné par  $O(l(n) \log^2 n \log \log n)$ .

Résultats partiels : Haible–Papanikolaou (1997) :  $\zeta(3)$  et variantes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

**Théorème. (VdH 2005)** *Supposons  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r$ , avec une singularité irrégulière en zéro. Alors on peut recouvrir effectivement un voisinage de  $\dot{\mathbb{C}}$  par un nombre fini de secteurs  $\mathcal{S}$  de type suivant : on peut calculer un procédé d'accéléro-sommation pour le système fondamental formel de solutions de  $Lh=0$ , donnant lieu à une matrice de transition  $\Delta_{0 \rightarrow z}$  pour tout  $z \in \mathcal{S}$ . Étant donnés  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{K} \cap \mathcal{S}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, on peut calculer une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{0 \rightarrow z}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^3 n)$ .*

*Si  $|z|$  est suffisamment petit par rapport à  $n$ , alors il existe aussi un procédé de sommation jusqu'au plus petit terme qui permet d'approximer les accéléro-sommes des solutions formelles canoniques en série de  $Lf=0$  en temps  $O(l(n) \log^2 n)$ .*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

**Théorème. (VdH 2005)** *Supposons  $L \in \mathbb{K}(x)[\partial]$  d'ordre  $r$ , avec une singularité irrégulière en zéro. Alors on peut recouvrir effectivement un voisinage de  $\dot{\mathbb{C}}$  par un nombre fini de secteurs  $\mathcal{S}$  de type suivant : on peut calculer un procédé d'accéléro-sommation pour le système fondamental formel de solutions de  $Lh=0$ , donnant lieu à une matrice de transition  $\Delta_{0 \rightarrow z}$  pour tout  $z \in \mathcal{S}$ . Étant donnés  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{K} \cap \mathcal{S}$  et  $n \in \mathbb{N}$  en entrée, on peut calculer une matrice  $\tilde{\Delta} \in \mathbb{K}^{r \times r}$  avec*

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta_{0 \rightarrow z}\| \leq 2^{-n}.$$

*En outre, pour  $z$  et  $L$  fixes, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^3 n)$ .*

*Si  $|z|$  est suffisamment petit par rapport à  $n$ , alors il existe aussi un procédé de sommation jusqu'au plus petit terme qui permet d'approximer les accéléro-sommes des solutions formelles canoniques en série de  $Lf=0$  en temps  $O(l(n) \log^2 n)$ .*

Résultats partiels : Brent–MacMillan (1980) :  $\gamma$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

Borel formel

 $\tilde{\mathcal{B}}$ 

$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta^{n-1} = \frac{1}{1+\zeta}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \quad \dashrightarrow \quad f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} d\zeta$$

Borel formel  $\tilde{\mathcal{B}}$

$\mathcal{L}$

Laplace analytique

$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta^{n-1} = \frac{1}{1+\zeta}$$

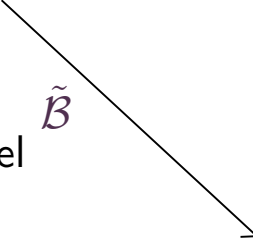
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n}$$

Borel formel  $\tilde{\mathcal{B}}$



$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \zeta^{2n-1}$$



Croissance en  $e^{\pm\zeta^2}$  à l'infini



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n}$$

$$z_1 = z^2 \Bigg| \downarrow$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z_1^n$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n}$$

$$z_1 = z^2 \downarrow$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z_1^n$$

Borel formel  $\tilde{\mathcal{B}}_1$

$$\hat{f}_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta_1^{n-1} = \frac{1}{1 + \zeta_1}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n}$$

$$z_1 = z^2 \downarrow$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z_1^n$$

$$f_1(z_1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta_1/z_1}}{1 + \zeta_1} d\zeta_1$$

Borel formel  $\tilde{\mathcal{B}}_1$

$\mathcal{L}_1$  Laplace analytique

$$\hat{f}_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta_1^{n-1} = \frac{1}{1 + \zeta_1}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^{2n} \dashrightarrow f(z) = f_1(\sqrt{z_1})$$

$$z_1 = z^2 \downarrow$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z_1^n$$

$$z = \sqrt{z_1} \uparrow$$

$$f_1(z_1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta_1/z_1}}{1 + \zeta_1} d\zeta_1$$

Borel formel  $\tilde{\mathcal{B}}_1$

$\mathcal{L}_1$  Laplace analytique

$$\hat{f}_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta_1^{n-1} = \frac{1}{1 + \zeta_1}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$

$$z_1 = z$$



$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$

$$z_1 = z$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1$$

$$\hat{f}_1(\zeta_1) = \frac{1}{1 + \zeta_1} + (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{E}(z_1^2))(\zeta_1)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$

$$z_1 = z$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1$$

$$\hat{f}_1(\zeta_1) = \frac{1}{1 + \zeta_1} + (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{E}(z_1^2))(\zeta_1)$$

$$z_2 = z^2$$

$\mathcal{A}_{12}$   
Accélération

$$\hat{f}_2(\zeta_2) = \int_0^{\infty} K_{12}(\zeta_1, \zeta_2) \hat{f}_1(\zeta_1) d\zeta_1$$

$$K_{12}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{z_1 \zeta_1 - z_2 \zeta_2} dz_2$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$

$$z_1 = z$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1$$

$$\hat{f}_1(\zeta_1) = \frac{1}{1 + \zeta_1} + (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{E}(z_1^2))(\zeta_1)$$

$$z_2 = z^2$$

$\mathcal{A}_{12}$   
Accélération

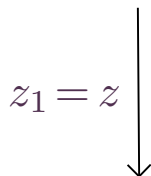
$$\hat{f}_2(\zeta_2) = \int_0^{\infty} K_{12}(\zeta_1, \zeta_2) \hat{f}_1(\zeta_1) d\zeta_1$$

$$\hat{f}_2(\zeta_2) = \left( \mathcal{A}_{12} \frac{1}{1 + \zeta_1} \right)(\zeta_2) + \frac{1}{1 + \zeta_2}$$

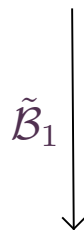
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

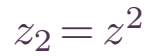
$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2)$$



$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

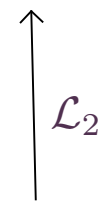


$$\hat{f}_1(\zeta_1) = \frac{1}{1 + \zeta_1} + (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{E}(z_1^2))(\zeta_1)$$



$\mathcal{A}_{12}$   
Accélération

$$f_2(z_2) = \int_0^{\infty} \hat{f}_2(\zeta_2) e^{-\zeta_2/z_2} d\zeta_2$$



$$\hat{f}_2(\zeta_2) = \int_0^{\infty} K_{12}(\zeta_1, \zeta_2) \hat{f}_1(\zeta_1) d\zeta_1$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{E}(z) + \tilde{E}(z^2) \dashrightarrow f(z) = f_2(\sqrt{z_2})$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ z_1 = z \end{array}$$

$$\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{E}(z_1) + \tilde{E}(z_1^2)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \tilde{\mathcal{B}}_1 \end{array}$$

$$\hat{f}_1(\zeta_1) = \frac{1}{1 + \zeta_1} + (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{E}(z_1^2))(\zeta_1)$$

$$\begin{array}{c} z_2 = z^2 \\ \xrightarrow{\mathcal{A}_{12}} \\ \text{Accélération} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ z = \sqrt{z_2} \end{array}$$

$$f_2(z_2) = \int_0^{\infty} \hat{f}_2(\zeta_2) e^{-\zeta_2/z_2} d\zeta_2$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathcal{L}_2 \end{array}$$

$$\hat{f}_2(\zeta_2) = \int_0^{\infty} K_{12}(\zeta_1, \zeta_2) \hat{f}_1(\zeta_1) d\zeta_1$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.
- Pour chaque temps critique  $z_i = \sqrt[k_i]{z}$ , la fonction  $\tilde{f}_k(z_k) = f(z)$  est holonome.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.
- Pour chaque temps critique  $z_i = \sqrt[k_i]{z}$ , la fonction  $\tilde{f}_k(z_k) = f(z)$  est holonome.
- Chaque transformée de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$  est holonome.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.
- Pour chaque temps critique  $z_i = \sqrt[k_i]{z}$ , la fonction  $\tilde{f}_k(z_k) = f(z)$  est holonome.
- Chaque transformée de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$  est holonome.
- Chaque  $\hat{f}_i = (\mathcal{A}_{k-1,k} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{12} \circ \tilde{\mathcal{B}}_1)(\tilde{f}_1)$  satisfait la même équation que  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.
- Pour chaque temps critique  $z_i = \sqrt[k_i]{z}$ , la fonction  $\tilde{f}_k(z_k) = f(z)$  est holonome.
- Chaque transformée de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$  est holonome.
- Chaque  $\hat{f}_i = (\mathcal{A}_{k-1,k} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{12} \circ \tilde{\mathcal{B}}_1)(\tilde{f}_1)$  satisfait la même équation que  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$ .
- $e^{\zeta_i/z_i}$  et  $K_{i,i+1}$  sont des fonctions holonomes.




1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- Solution formelle  $\tilde{f}(z)$  holonome.
- Pour chaque temps critique  $z_i = \sqrt[k_i]{z}$ , la fonction  $\tilde{f}_k(z_k) = f(z)$  est holonome.
- Chaque transformée de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$  est holonome.
- Chaque  $\hat{f}_i = (\mathcal{A}_{k-1,k} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{12} \circ \tilde{\mathcal{B}}_1)(\tilde{f}_1)$  satisfait la même équation que  $\tilde{\mathcal{B}}_i \tilde{f}_i$ .
- $e^{\zeta_i/z_i}$  et  $K_{i,i+1}$  sont des fonctions holonomes.
- Les intégrandes des intégrales d'accélération et de Laplace sont holonomes.

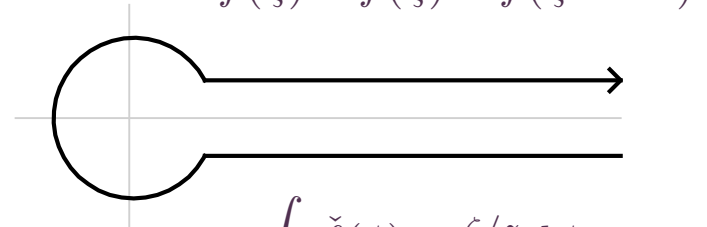
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

## Mineurs et majeurs



A diagram showing a horizontal real axis with a vertical imaginary axis intersecting at the origin. A solid black dot is placed at the origin, and a horizontal arrow points to the right from this dot, representing a branch cut along the positive real axis.

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$




A diagram of a keyhole contour in the complex plane. It consists of a large circle centered at the origin, a horizontal line segment along the positive real axis extending from the circle to the right, and another horizontal line segment parallel to the first one, slightly below it, also extending from the circle to the right. The two horizontal segments are connected by the circular arc on the left. Arrows on the horizontal segments point to the right, indicating the direction of integration.

$$\hat{f}(\zeta) = \check{f}(\zeta) - \check{f}(\zeta e^{-2\pi i})$$

$$\int_{\mathcal{H}} \check{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$

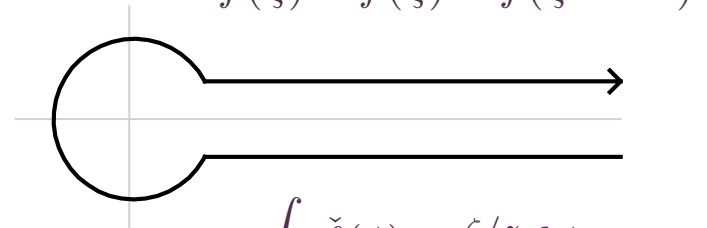
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

## Mineurs et majeurs



A diagram showing a horizontal real axis with a vertical imaginary axis intersecting at the origin. A solid black dot is placed at the origin, and a horizontal arrow points to the right from this dot, representing a branch cut along the positive real axis.

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$

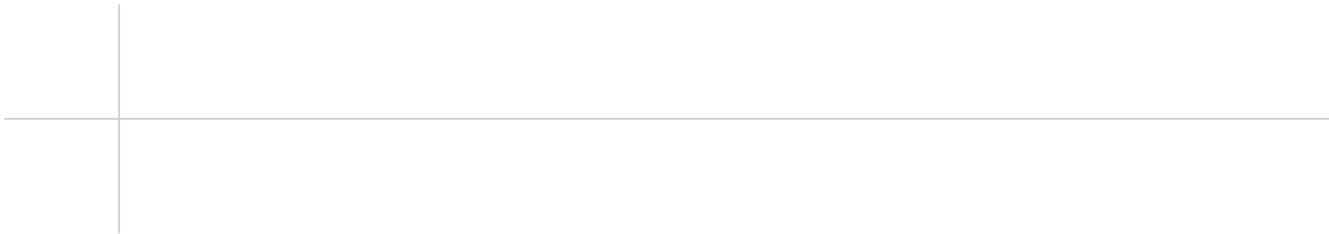


A diagram of a keyhole contour in the complex plane. It consists of a circle centered at the origin, a horizontal line segment extending to the right from the circle's right edge, a second horizontal line segment parallel to the first one below it, and another horizontal line segment extending to the right from the circle's right edge. Arrows on the horizontal segments indicate a counter-clockwise direction of integration. The contour encloses a branch cut along the positive real axis.

$$\hat{f}(\zeta) = \check{f}(\zeta) - \check{f}(\zeta e^{-2\pi i})$$


$$\int_{\mathcal{H}} \check{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$

## Intégrales à décroissance exponentielle




1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

## Mineurs et majeurs



A diagram showing a horizontal axis with a vertical line passing through the origin. A solid black dot is placed at the origin, and a horizontal arrow points to the right from this dot, representing a branch cut along the positive real axis.

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$

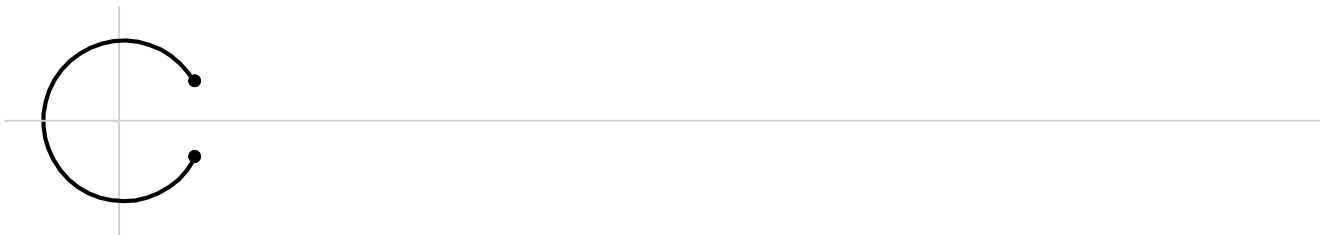


A diagram showing a horizontal axis with a vertical line passing through the origin. A circular loop is drawn around the origin, with a horizontal arrow pointing to the right from the right side of the loop. Below the loop, a horizontal line extends to the right, representing a branch cut along the positive real axis.

$$\hat{f}(\zeta) = \check{f}(\zeta) - \check{f}(\zeta e^{-2\pi i})$$

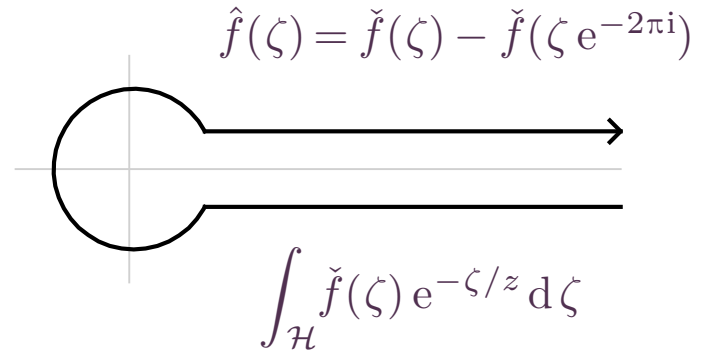
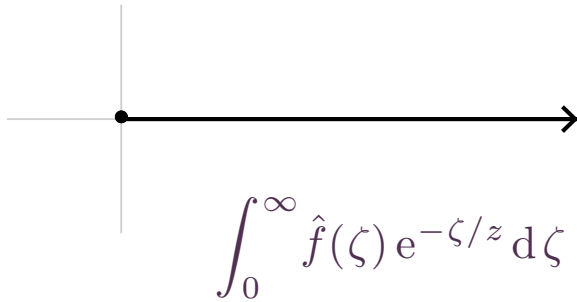
$$\int_{\mathcal{H}} \check{f}(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta$$

## Intégrales à décroissance exponentielle

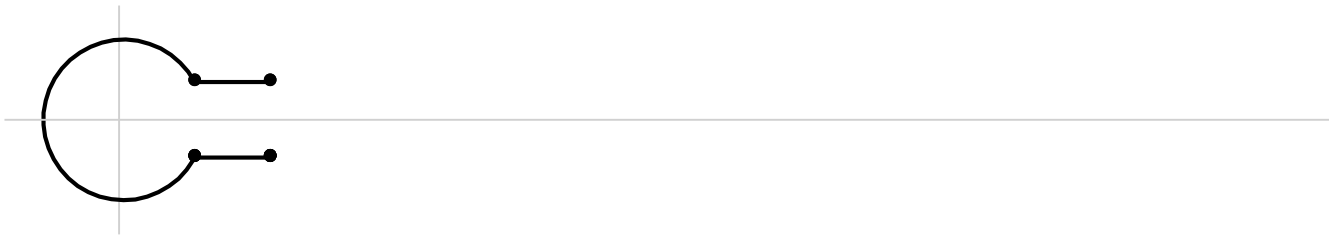


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

### Mineurs et majeurs

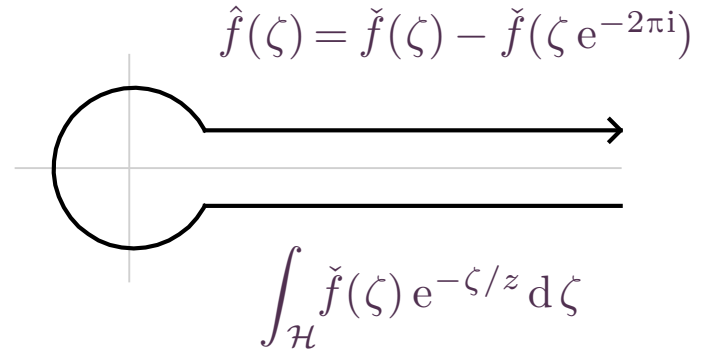
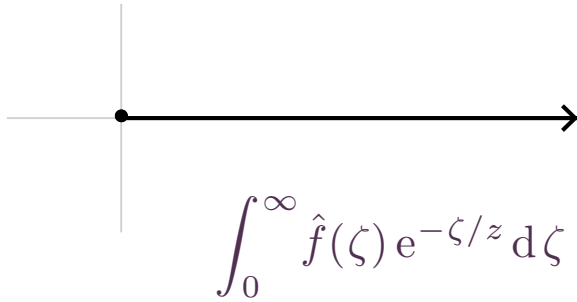


### Intégrales à décroissance exponentielle

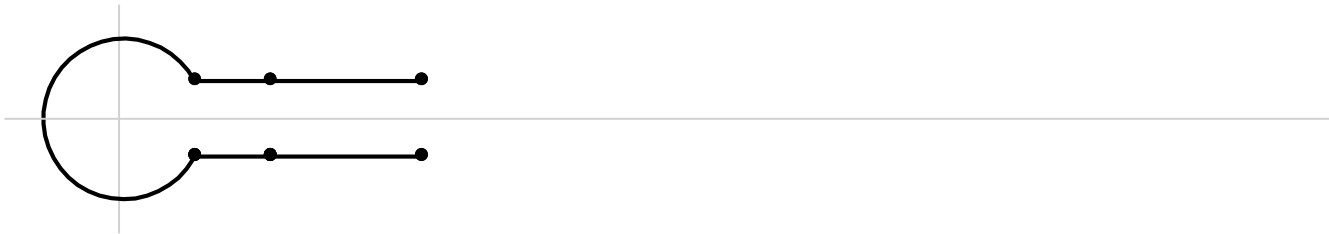


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

### Mineurs et majeurs

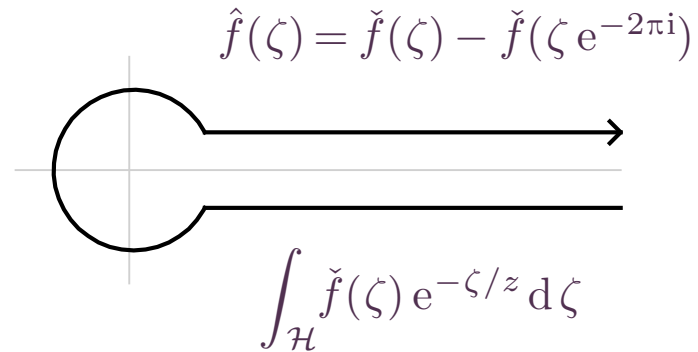
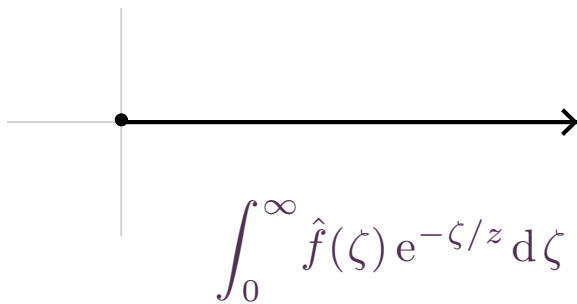


### Intégrales à décroissance exponentielle

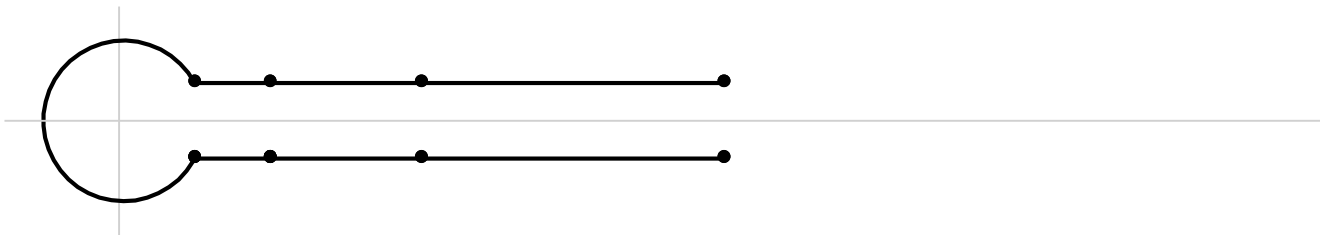


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

### Mineurs et majeurs

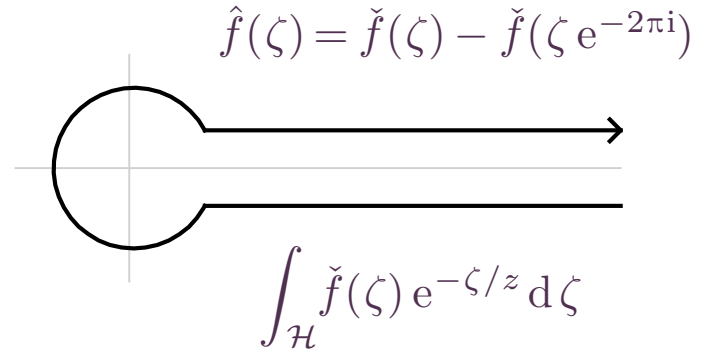
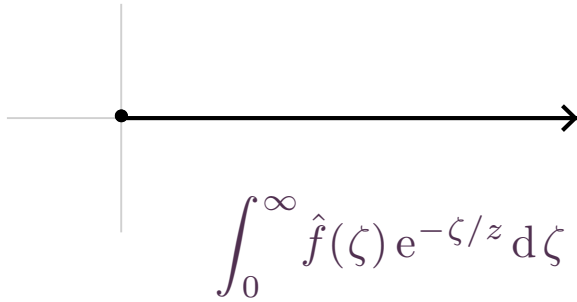


### Intégrales à décroissance exponentielle

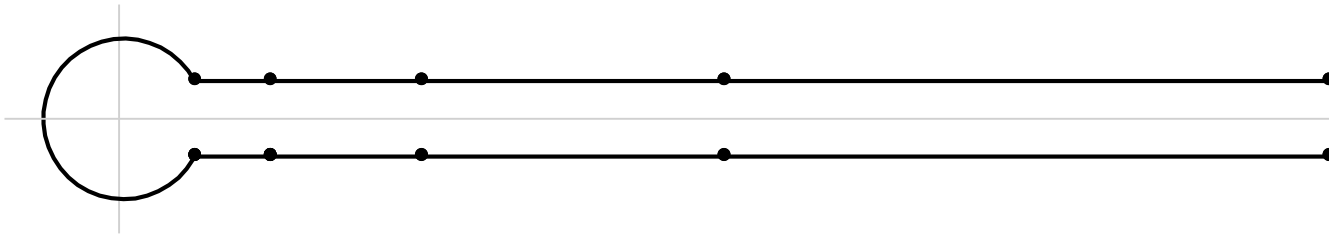


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

### Mineurs et majeurs



### Intégrales à décroissance exponentielle





1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

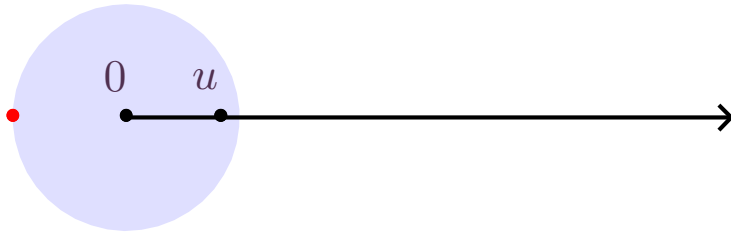
$$\tilde{E}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! z^n$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$S_N(z) = (\mathcal{S}_N \tilde{E})(z) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \quad \left(N \approx \frac{1}{z}\right)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

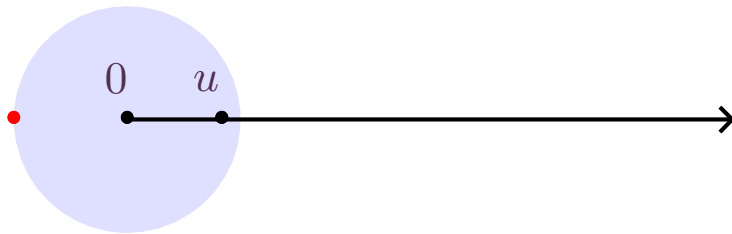
$$S_N(z) = (\mathcal{S}_N \tilde{E})(z) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \quad \left(N \approx \frac{1}{z}\right)$$



$$E(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} d\zeta$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$S_N(z) = (\mathcal{S}_N \tilde{E})(z) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \quad \left(N \approx \frac{1}{z}\right)$$

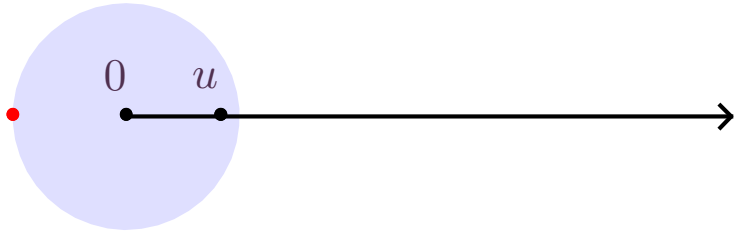


$$E(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} d\zeta$$

$$(E - S_N)(z) = \int_0^u \frac{\zeta^N e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} dz + \int_u^{\infty} \frac{\zeta^N e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} dz$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$S_N(z) = (\mathcal{S}_N \tilde{E})(z) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (n-1)! z^n \quad \left(N \approx \frac{1}{z}\right)$$



$$E(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} d\zeta$$

$$(E - S_N)(z) = \int_0^u \frac{\zeta^N e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} dz + \int_u^{\infty} \frac{\zeta^N e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} dz$$

$$N \leq \square |z|^{-1} \implies |(E - S_N)(z)| \leq \square e^{-\square |z|^{-1}}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Temps critiques  $z_1 = \sqrt[k_1]{z}, \dots, z_p = \sqrt[k_p]{z}$  avec  $k_1 \leq \dots \leq k_p$ .

Approximation de  $f(z)$  avec  $n$  décimales de précision ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Temps critiques  $z_1 = \sqrt[k_1]{z}, \dots, z_p = \sqrt[k_p]{z}$  avec  $k_1 \leq \dots \leq k_p$ .

Approximation de  $f(z)$  avec  $n$  décimales de précision ?

Pour  $z' - z = O(z^{k_1+1})$ , on montre que  $\|\Delta_{z \rightarrow z'}\| = O(1)$ .

$z \rightsquigarrow$  approximation  $z'$  avec  $z' - z = O(z^{k_1+1})$  et  $\text{size}(z') = O(\log |z|)$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Temps critiques  $z_1 = \sqrt[k_1]{z}, \dots, z_p = \sqrt[k_p]{z}$  avec  $k_1 \leq \dots \leq k_p$ .

Approximation de  $f(z)$  avec  $n$  décimales de précision ?

Pour  $z' - z = O(z^{k_1+1})$ , on montre que  $\|\Delta_{z \rightarrow z'}\| = O(1)$ .

$z \rightsquigarrow$  approximation  $z'$  avec  $z' - z = O(z^{k_1+1})$  et  $\text{size}(z') = O(\log |z|)$ .

### Sommation jusqu'au plus petit terme

Complexité uniforme  $O(l(n) \log^2 n)$  si  $\square/n^{k_1} \leq |z| \leq \square$ .



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Temps critiques  $z_1 = \sqrt[k_1]{z}, \dots, z_p = \sqrt[k_p]{z}$  avec  $k_1 \leq \dots \leq k_p$ .

Approximation de  $f(z)$  avec  $n$  décimales de précision ?

Pour  $z' - z = O(z^{k_1+1})$ , on montre que  $\|\Delta_{z \rightarrow z'}\| = O(1)$ .

$z \rightsquigarrow$  approximation  $z'$  avec  $z' - z = O(z^{k_1+1})$  et  $\text{size}(z') = O(\log |z|)$ .

### Sommation jusqu'au plus petit terme

Complexité uniforme  $O(l(n) \log^2 n)$  **si**  $\square/n^{k_1} \leq |z| \leq \square$ .

### Accéléro-sommation

Complexité uniforme  $O(l(n) \log^3 n)$  **si**  $|z| \leq \square/n^{k_p}$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Temps critiques  $z_1 = \sqrt[k_1]{z}, \dots, z_p = \sqrt[k_p]{z}$  avec  $k_1 \leq \dots \leq k_p$ .

Approximation de  $f(z)$  avec  $n$  décimales de précision ?

Pour  $z' - z = O(z^{k_1+1})$ , on montre que  $\|\Delta_{z \rightarrow z'}\| = O(1)$ .

$z \rightsquigarrow$  approximation  $z'$  avec  $z' - z = O(z^{k_1+1})$  et  $\text{size}(z') = O(\log |z|)$ .

### Sommation jusqu'au plus petit terme

Complexité uniforme  $O(l(n) \log^2 n)$  **si**  $\square/n^{k_1} \leq |z| \leq \square$ .

### Accéléro-sommation

Complexité uniforme  $O(l(n) \log^3 n)$  **si**  $|z| \leq \square/n^{k_p}$ .

### Problème

Que faire lorsque  $\square/n^{k_p} \leq |z| \leq \square/n^{k_1}$  ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z_1)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z_1)$$



$$\hat{f}_1(\zeta_1) = (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{f}_1)(\zeta_1)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z_1)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{f}_1(\zeta_1) = (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{f}_1)(\zeta_1)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{f}_2(\zeta_2) = (\mathcal{A}_{12} \hat{f}_1)(\zeta_2)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z_1)$$



$$\hat{f}_1(\zeta_1) = (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{f}_1)(\zeta_1)$$



$$\hat{f}_2(\zeta_2) = (\mathcal{A}_{12} \hat{f}_1)(\zeta_2)$$



$$\hat{f}_q(\zeta_q) = (\mathcal{A}_{q-1,q} \hat{f}_{q-1})(\zeta_q)$$

$$\begin{array}{c}
 \tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z_1) \\
 \downarrow \\
 \hat{f}_1(\zeta_1) = (\tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{f}_1)(\zeta_1) \\
 \downarrow \\
 \hat{f}_2(\zeta_2) = (\mathcal{A}_{12} \hat{f}_1)(\zeta_2) \\
 \vdots \\
 \hat{f}_q(\zeta_q) = (\mathcal{A}_{q-1,q} \hat{f}_{q-1})(\zeta_q) \\
 \downarrow \\
 (\mathcal{E}_{q,Z_q} \tilde{f})(z_q) = \int_0^{Z_q} \hat{f}_q(\zeta_q) e^{-\zeta_q/z_q} d\zeta_q
 \end{array}$$

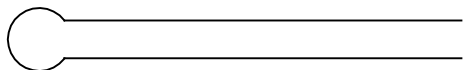
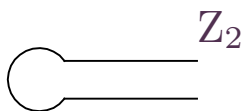
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

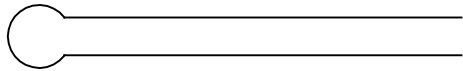
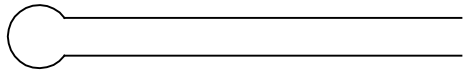
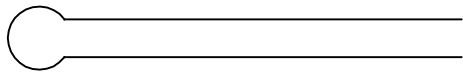
$$\tilde{f}_1(z_1)$$

complexité  $O(l(n) \log^2 n)$  si  $\square/n^{k_1} \leq |z|$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 $\tilde{f}_1(z_1)$ complexité  $O(l(n) \log^2 n)$  si  $\square/n^{k_1} \leq |z|$  $\hat{f}_1(\zeta_1)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $\square/n^{k_2} \leq |z| \leq \square/n^{k_1}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 $\tilde{f}_1(z_1)$ complexité  $O(l(n) \log^2 n)$  si  $\square/n^{k_1} \leq |z|$  $\hat{f}_1(\zeta_1)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $\square/n^{k_2} \leq |z| \leq \square/n^{k_1}$  $\hat{f}_2(\zeta_2)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $\square/n^{k_3} \leq |z| \leq \square/n^{k_2}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 $\tilde{f}_1(z_1)$ complexité  $O(l(n) \log^2 n)$  si  $\square/n^{k_1} \leq |z|$  $\hat{f}_1(\zeta_1)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $\square/n^{k_2} \leq |z| \leq \square/n^{k_1}$  $\hat{f}_2(\zeta_2)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $\square/n^{k_3} \leq |z| \leq \square/n^{k_2}$  $\hat{f}_p(\zeta_p)$ complexité  $O(l(n) \log^3 n)$  si  $|z| \leq \square/n^{k_p}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{h}_i(z) = \tilde{\varphi}_i(z) z^{\lambda_i} e^{P_i(z^{-1/\kappa})} = \tilde{\varphi}_i(z) E_i(z)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{h}_i(z) = \tilde{\varphi}_i(z) z^{\lambda_i} e^{P_i(z^{-1/\kappa})} = \tilde{\varphi}_i(z) E_i(z)$$

On ordonne

$$|E_1(z)| \geq |E_2(z)| \geq \dots \geq |E_r(z)| \quad *$$

$\rightsquigarrow$  couverture par un nombre fini de secteurs

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$$\tilde{h}_i(z) = \tilde{\varphi}_i(z) z^{\lambda_i} e^{P_i(z^{-1/\kappa})} = \tilde{\varphi}_i(z) E_i(z)$$

On ordonne

$$|E_1(z)| \geq |E_2(z)| \geq \dots \geq |E_r(z)| \quad *$$

$\rightsquigarrow$  couverture par un nombre fini de secteurs

**Théorème.** Il existe des constantes  $C > 0$  et  $\nu$  avec

$$\|F(z)\| \geq C |E_1(z) z^\nu| \quad F(z) = \begin{pmatrix} f(z) \\ \vdots \\ f^{(r-1)}(z) \end{pmatrix}$$

pour tout  $z \in \mathcal{S}$  où  $\mathcal{S}$  est le secteur avec  $*$ .

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

- $\Omega$  ouvert étoilé où  $f$  est définie,  $\Theta$  : zéros de  $f$
- $\mathbb{D}$  nombres en virgule fixe.
- $\mathbb{F}$  nombres en virgule flottante.
- $\mathcal{B}(c, r)$  boule fermée de centre  $c$  et rayon  $r$ .

**Théorème.** *Il existe un algorithme qui prend  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \Omega \cap \mathbb{D}[i]$  en entrée avec*

$$\mathcal{B}(z, 2^{-n}) \cap (\partial\Omega \cup \Theta) = \emptyset$$

*et  $\text{size}(z) \leq n$ , et qui calcule  $v \in \mathbb{F}[i]$  avec*

$$|f(z) - v| \leq 2^{-n} |f(z)|.$$

*De plus, le temps de calcul est borné par  $O(l(n) \log^3 n)$ , **uniformément** en  $z$ .*