

Thesis title: Formal Reduction of Linear Singular Differential Systems

Subtitle: Singularly-perturbed linear differential systems and completely integrable Pfaffian systems with normal crossings

Abstract: In this thesis, we are interested in the local analysis of singularly-perturbed linear differential systems and completely integrable Pfaffian systems in several variables. Such systems have a vast literature and arise profoundly in applications. However, their symbolic resolution is still open to investigation. Our approaches rely on the state of art of formal reduction of singular linear systems of ordinary differential equations (ODS) over univariate fields.

In the case of singularly-perturbed linear differential systems, the complications arise mainly from the phenomenon of turning points. We extend notions introduced for the treatment of ODS to such systems and generalize corresponding algorithms to construct formal solutions in a neighborhood of a singularity. The underlying components of the formal reduction proposed are stand-alone algorithms as well and serve different purposes (e.g. rank reduction, classification of singularities, computing restraining index).

In the case of Pfaffian systems, the complications arise from the interdependence of the multiple components which constitute the former and the multivariate nature of the field within which reduction occurs. However, we show that the formal invariants of such systems can be retrieved from an associated ODS, which limits computations to univariate fields. Furthermore, we complement our work with a rank reduction algorithm and discuss the obstacles encountered.

The techniques developed herein paves the way for further generalizations of algorithms available for univariate differential systems to bivariate and multivariate ones, for different types of systems of functional equations.

In addition to proposing algorithms for these two systems, we report on apparent singularities of differential systems whose coefficients lie in the univariate field of rational functions and perturbed eigenvalue problem. The main results of this thesis are summed up in three published papers [1, 2, 4], a submitted paper [3], a paper under redaction [5], and five computer algebra packages [6, 7, 8, 9, 10].

Keywords: Computer algebra, formal reduction, rank reduction, singularities, turning points, linear differential systems, Pfaffian systems, singularly-perturbed linear differential systems, algorithms.

Titre thèse (français): Réduction Formelle des Systèmes Différentiels Linéaires Singuliers

Sous-titre : Systèmes différentiels linéaires singulièrement perturbés et systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux

Résumé : Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse locale de systèmes différentiels linéaires singulièrement perturbés et de systèmes de Pfaff complètement intégrables et multivariés à croisements normaux. De tels systèmes ont une vaste littérature et se retrouvent dans de nombreuses applications. Cependant, leur résolution symbolique est toujours à l'étude. Nos approches reposent sur l'état de l'art de la réduction formelle des systèmes linéaires singuliers d'équations différentielles ordinaires univariées (ODS).

Dans le cas des systèmes différentiels linéaires singulièrement perturbés, les complications surviennent essentiellement à cause du phénomène des points tournants. Nous généralisons les notions et les algorithmes introduits pour le traitement des ODS afin de construire des solutions formelles. Les algorithmes sous-jacents sont également autonomes (par exemple la réduction de rang, la classification de la singularité, le calcul de l'indice de restriction).

Dans le cas des systèmes de Pfaff, les complications proviennent de l'interdépendance des multiples sous-systèmes et de leur nature multivariée. Néanmoins, nous montrons que les invariants formels de ces systèmes peuvent être récupérés à partir d'un ODS associé, ce qui limite donc le calcul à des corps univariés. De plus, nous donnons un algorithme de réduction de rang et nous discutons des obstacles rencontrés.

Outre ces deux systèmes, nous parlons des singularités apparentes des systèmes différentiels univariés dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et du problème des valeurs propres perturbées.

Les techniques développées au sein de cette thèse facilitent les généralisations d'autres algorithmes disponibles pour les systèmes différentiels univariés aux cas des systèmes bivariés ou multivariés, et aussi aux systèmes d'équations fonctionnelles.

Mots clés : Calcul formel, réduction formelle, reduction de rang, singularités, points tournants, systèmes différentiels linéaires, systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux, systèmes différentiels linéaires singulièrement perturbés, les algorithmes.

LABO - UMR CNRS n° 7252
123, avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES

References

- [1] H. Abbas, M. A. Barkatou, and S.S. Maddah. Formal Reduction of a class of Pfaffian Systems in Two Variables. In *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. ACM Press, pp 312 - 319, 2014.
- [2] H. Abbas, M. A. Barkatou, and S.S. Maddah. On the Reduction of Singularly-Perturbed Linear Differential Systems. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ACM Press, pp 320-327, 2014.
- [3] M. A. Barkatou, M. Jaroschek, and S.S. Maddah. Formal Solutions of Completely Integrable Pfaffian Systems with Normal Crossings in Several Variables. Submitted, available at [arXiv](#): 1511.00180.
- [4] M. A. Barkatou and S.S. Maddah. Removing Apparent Singularities of Systems of Linear Differential Equations with Rational Function Coefficients. In *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. ACM Press, 2015.
- [5] M. Barkatou, and S.S. Maddah. Formal Solutions of Singularly-Perturbed Linear Differential Systems. Under redaction, preliminary version available at [arXiv](#): 1503.09075.
- [6] S. S. Maddah. LINDALG : MATHEMAGIX Package for Symbolic Resolution of Linear Systems of Differential Equations. Available at: <http://www.mathemagix.org>
- [7] S. S. Maddah. MINIISOLDE : MAPLE Package for Symbolic Resolution of Linear Systems of Differential Equations. Available for download at: http://www.unilim.fr/pages_perso/suzy.maddah/Research_.html
- [8] S. S. Maddah. PARAMINT : MAPLE Package for Symbolic Resolution of Singularly-Perturbed Linear Differential Systems, Prototype Implementation. Available for download at: http://www.unilim.fr/pages_perso/suzy.maddah/Research_.html
- [9] S. S. Maddah. PFAFFINT : MAPLE Package for symbolic resolution of completely integrable Pfaffian systems with normal crossings. Prototype implementation. Available for download at: http://www.unilim.fr/pages_perso/suzy.maddah/Research_.html
- [10] S. S. Maddah, M. A. Barkatou. APPSING : MAPLE Package for removing apparent singularities of systems of linear differential equations with rational function coefficients. Available for download at: http://www.unilim.fr/pages_perso/suzy.maddah/Research_.html